

CS - 39

三段階テラーガーキン法による角柱周り空力特性解析

中央大学 学生員 小西英生
東京電力 正会員 金子賢一
中央大学 正会員 樫山和男

1. はじめに

流れの数値解析において、Donea^[1]らによって高次精度のテラーガーキン法が提案されている。この手法は、時間微分項のテラー展開を微小時間増分量 Δt の3次の微小項まで考慮して離散化を行う方法である。しかし、この方法は高階時間導関数の離散化が複雑なものとなる。本報告では、より簡便な多段解法により3次精度を実現する3段階のテラーガーキン法^[2]を用い、本手法の有効性を検討する。解析例として、空力弾性的不安定振動の発生の見地からも重要視される長方形断面柱を用い、物体後流に生ずる渦列のストローハル数に着目し検討を行った。

2. 基礎方程式

非圧縮粘性流体の基礎方程式として、ナビエーストークスの運動方程式と連続の式を用いる。

$$\dot{U}_i + U_j U_{i,j} + P_{,i} - \frac{1}{Re} (U_{i,j} + U_{j,i})_{,j} - F_i = 0 \quad (1)$$

$$U_{i,i} = 0 \quad (2)$$

ここに、 $\dot{}$ は時間に関する偏微分、 $_{,i}$ は空間方向に関する偏微分、 P は圧力、 Re はレイノルズ数、 F_i は物体力を表す。

3. 三段階テラーガーキン有限要方程式

運動方程式に対する時間方向の離散化に、三段階テラーガーキン法を用いると以下ようになる。

$$U_i^{n+\frac{1}{3}} = U_i^n - \frac{\Delta t}{3} \left\{ U_j^n U_{i,j}^n - P_{,i}^n - \frac{1}{Re} (U_{i,j}^n + U_{j,i}^n)_{,j} \right\} \quad (3)$$

$$U_i^{n+\frac{2}{3}} = U_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left\{ U_j^{n+\frac{1}{3}} U_{i,j}^{n+\frac{1}{3}} - P_{,i}^n - \frac{1}{Re} (U_{i,j}^{n+\frac{1}{3}} + U_{j,i}^{n+\frac{1}{3}})_{,j} \right\} \quad (4)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \Delta t \left\{ U_j^{n+\frac{2}{3}} U_{i,j}^{n+\frac{2}{3}} - P_{,i}^{n+1} - \frac{1}{Re} (U_{i,j}^{n+\frac{2}{3}} + U_{j,i}^{n+\frac{2}{3}})_{,j} \right\} \quad (5)$$

ここに、添字 n は各時刻レベル、 Δt は微小時間増分量である。

また、非圧縮条件を満足させるために次の連続の式を導入する。

$$U_{i,i}^{n+1} = 0 \quad (6)$$

ここで(5)式の発散をとり(6)式を代入することにより圧力に関するポアソン方程式が導かれる。

$$P_{,ii}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} U_i^n - \left\{ U_j^{n+\frac{2}{3}} U_{i,j}^{n+\frac{2}{3}} - \frac{1}{Re} (U_{i,j}^{n+\frac{2}{3}} + U_{j,i}^{n+\frac{2}{3}})_{,j} \right\} \quad (7)$$

(3),(4),(5),(7)式にガラーキン法を適用し、流速と圧力に対しては三角形一次要素を用いて離散化を行う。

4. 数値解析例

数値解析例として、図1に示す一様流中に置かれた2次元角柱周りの解析を行った。境界条件は図1に示す通りである。解析例1として、計算対象のレイノルズ数を、 $Re = 100, 500, 600, 1200$ と変化させた。計算に使用した有限要素分割を図2に示す。要素の最小幅は0.015となっており、 $Re = 100$ の時に境界層を10分割していることになる。図3にレイノルズ数とストローハル数の比較を岡島ら^[3]の実験結果とともに示す。実験によると $Re = 400 \sim 500$ 付近でストローハル数が大きい成分と小さい成分のふたつが存在しているが、本解析においてもこの現象がとらえられている。

解析例2として、計算対象のレイノルズ数を $Re = 1000$ とし辺長比 B/H （ H は矩形断面の流れに垂直方向の辺の高さ、 B は流れ方向の長さ）を0.3, 0.5, 0.7, 1.0, 2.0, 3.0と変化させ2次元角柱周り解析を行った。この計算では、微小時間増分量 $\Delta t = 0.008$ とし、無次元時間 $T = 400$ まで行った。図4にストローハル数と辺長比の関係を示す。 B/H の増加と共にストローハル数がなだらかに減少するが B/H が2~3の間においてストローハル数が急増するのがわかる。この現象は実験値^[3]と良い一致を示している。これは、前面の縁で剥離し

た流れが流れに平行な上下の面に最付着することに対応している。図5と図6に、 $B/H = 3.0, B/H = 0.5$ の場合の上面の圧力分布（負圧を外向きとした）示した。側面の負圧は辺長比に左右され剥離した流線が再付着する否かによって変化する。前者の場合、流線の再付着点付近では負圧の減少が見られる。

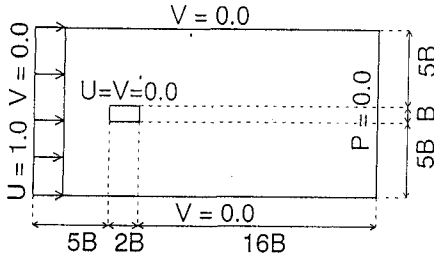


図1 境界条件

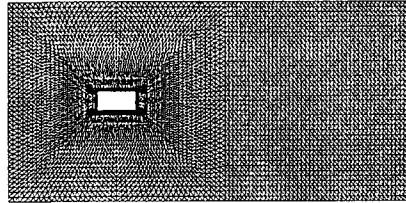


図2 有限要素分割図（要素数= 13200, 節点数= 6805）

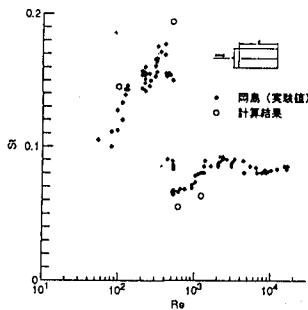


図3 ストローハル数の実験結果との比較

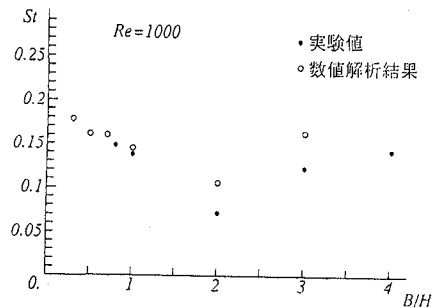


図4 辺長比とストローハル数の実験結果との比較

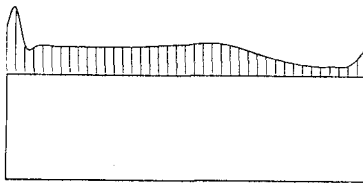


図5 $B/H = 3.0$:上面の圧力分布



図6 $B/H = 0.5$:上面の圧力分布

（負圧を外向きとした）

5. おわりに

本論文において、三段階有限要素法により一様流中における角柱に作用する特性値を算出し、実験値との比較を行った。レイノルズ数の変化にともなうストローハル数の変化は実験値と良い一致を示した。又、辺長比とストローハル数の関係においても再復帰現象がとらえられ、三段階法の有効性が示されたと考えられる。今後、ALE法を導入し角柱の自由振動現象における流れと物体の相互関係問題に本手法を適用していく予定である。

参考文献:

- [1] J. Donea: "A Taylor-Galerkin method for convective transport problems", Int. J. Numer. Eng., 20, 101-119, 1984.
- [2] 金子賢一、檜山和男: "3段階テイラーガラーキン法による2次元角柱周りの流れ解析", 第20回関東支部技術研究発表会講演集, pp. 46-47 (1993)
- [3] 岡島厚、杉谷賢一郎: "長方形断面柱のストローハル数と背圧係数（レイノルズ数の影響）", 日本機械学会論文集（B編）Vol. 50, No. 457, pp. 2004-2012, 1984
- [4] 中口博、橋本貴久裕、武藤真理: "矩形断面柱の抗力に関する1実験" 航空学会誌 Vol. 16, No. 168, 1968