

CS - 35

立方体キャビティ内流れの3段階テイラーガラーキン有限要素解析

中央大学 学生員 水野健一

中央大学 正会員 樫山和男

1. はじめに

三次元非圧縮粘性流体流れの数値計算法の妥当性を検証する数値解析例として、立方体キャビティ流れの解析が数多くなされている。本報告は、3段階テイラーガラーキン有限要素法^[1]を用いて立方体キャビティ流れの解析を行い、他の数値解析例と比較をし、本手法の有効性について検討する。

2. 基礎方程式

基礎方程式としては、以下のような Boussinesq 近似された Navier-Stokes の運動方程式、連続の式及びエネルギー方程式を用いる。

$$u_{i,i} + u_j u_{j,j} + p_{,i} - \frac{1}{Gr} \{T e_i - (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j}\} = 0 \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad (2)$$

$$T_{,t} + u_i T_{,i} - \frac{1}{Ra} T_{,ii} = 0 \quad (3)$$

ここに、 $\cdot$ は偏微分を表し、 u_i は流速、 p は圧力、 T は温度、 Gr は Grashof 数、 Ra は Rayleigh 数、 $e_1 = e_2 = 0, e_3 = -1$ である。

3. 3段階テイラーガラーキン有限要素法による離散化

(1) 式の運動方程式及び(3)式のエネルギー方程式に対して、3段階テイラーガラーキン法を適用して離散化を行う。

第1段階

$$u_i^{n+1/3} - u_i^n = \frac{\Delta t}{3} [-u_j^n u_{j,i}^n - p_{,i}^n - \frac{1}{Gr} \{T^n e_i - (u_{i,j}^n + u_{j,i}^n)_{,j}\}] \quad (4)$$

$$T^{n+1/3} - T^n = \frac{\Delta t}{3} \{-u_i^n T_{,i}^n + \frac{1}{Ra} T_{,ii}^n\} \quad (5)$$

第2段階

$$u_i^{n+2/3} - u_i^{n+1/3} = \frac{\Delta t}{2} [-u_j^{n+1/3} u_{j,i}^{n+1/3} - p_{,i}^{n+1/3} - \frac{1}{Gr} \{T^{n+1/3} e_i - (u_{i,j}^{n+1/3} + u_{j,i}^{n+1/3})_{,j}\}] \quad (6)$$

$$T^{n+2/3} - T^{n+1/3} = \frac{\Delta t}{2} \{-u_i^{n+1/3} T_{,i}^{n+1/3} + \frac{1}{Ra} T_{,ii}^{n+1/3}\} \quad (7)$$

第3段階

$$u_i^{n+1} - u_i^{n+2/3} = \Delta t \{[-u_j^{n+2/3} u_{j,i}^{n+2/3} - p_{,i}^{n+2/3} - \frac{1}{Gr} \{T^{n+2/3} e_i - (u_{i,j}^{n+2/3} + u_{j,i}^{n+2/3})_{,j}\}]\} \quad (8)$$

$$T^{n+1} - T^{n+2/3} = \Delta t \{-u_i^{n+2/3} T_{,i}^{n+2/3} + \frac{1}{Ra} T_{,ii}^{n+2/3}\} \quad (9)$$

ここで、非圧縮条件を満足させるために、次の連続方程式を導入する。

$$u_{i,i}^{n+1} = 0 \quad (10)$$

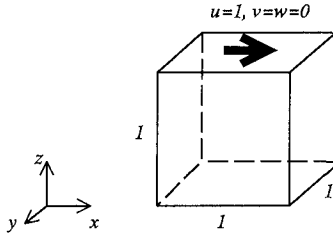
そして、(8)式の発散をとり、それに(10)式を代入すると、次式のような圧力に関するポアソン方程式が導かれる。

$$p_{,ii}^{n+1} = \frac{u_{j,i}^{n+2/3}}{\Delta t} - u_{j,i}^{n+2/3} u_{i,j}^{n+2/3} - u_j^{n+2/3} u_{i,j}^{n+2/3} - \frac{1}{Gr} \{T_{,i}^{n+2/3} e_i - (u_{i,j}^{n+2/3} + u_{j,i}^{n+2/3})_{,ij}\} \quad (11)$$

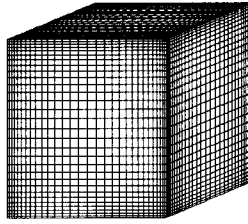
(4)～(9)及び(11)式にガラーキン法を適用し離散化を行う。また、要素としては8節点六面体要素を用いている。なお、計算効率向上の手段として解析的積分^[2]の導入を行った。

4. 数値解析例

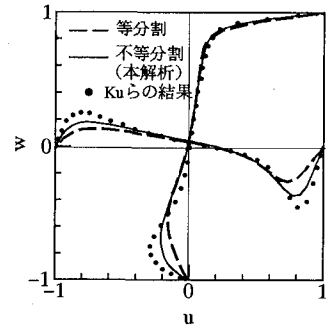
本報告では、図-1に示すような等温場の立方体キャビティ流れ解析を行った。ここで、等温場であるため(1)式の温度に関する項及び(3)式は省略し、 $Gr = Re$ (= Reynolds 数)としている。なお、要素分割は図-2に示すような不等分割のものを用いた(30×30×30、節点総数 29791、要素総数 27000)。計算条件として、Reynolds 数は1000、微小時間増分量 Δt は0.025とした。図-3に $y = 0.5$ 断面における流速分布図を示す(無次元時間 $t = 30$)。また、図-4にその時の圧力分布図と流速ベクトル図を示す。但し、流速ベクトル図の(b)及び(c)は、スケールを(a)の2倍にしてある。図-3より本解析結果は、他の数値解析例^[3]と良好に一致している。また、図中に示したように等分割の要素を用いた場合と比較すると、本解析の方が Ku らの結果に近くなっている。さらに、本手法は Δt が他の手法^[4]よりも長くとれることが、有利な点の1つあるである。



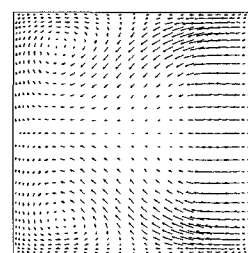
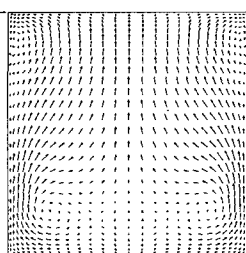
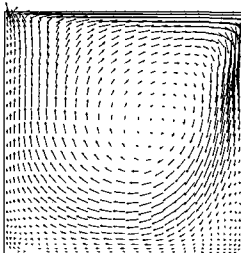
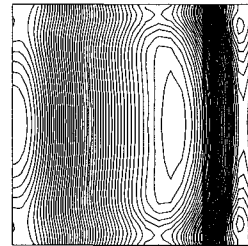
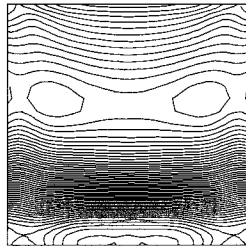
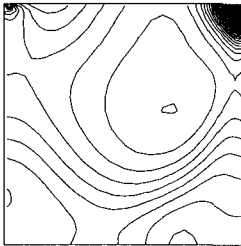
その他の境界は
全てnon-slip条件
図-1 解析モデル及び境界条件



節点総数 29791
要素総数 27000
図-2 有限要素分割図



($Re=1000, t=30.0$)
図-3 $y=0.5$ 断面における流速分布図



(a) (b) (c)
図-4 圧力分布図及び流速ベクトル図 [(a); $y=0.5$, (b); $x=0.5$, (c); $z=0.5$]

5. おわりに

本報告において、三次元非圧縮粘性流体の有限要素解析法として、3段階テイラーガラーキン法に基づく解析手法を示し、等温場の立方体キャビティ内流れに適用した。そして、他手法との比較において良好な一致を示した。今後は、本手法を自然対流に適用していく予定である。

参考文献

- [1] Jiang, C.B., Kawahara, M. and Kashiwayama, K.: A Three-Step Finite Element Method for Convection Dominated Incompressible Flow, Computational Fluid Dynamics Journal, vol.1 no.4, pp447-466, 1993
- [2] 棚橋隆彦: GSMAC-FEM 数値流体力学の基礎とその応用, アイビーシー, 1991
- [3] Ku, H.C., Hirsh, R.S. and Taylor, T.D.: A Pseudospectral Method for Solution of Three-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations, J. Comput. Physics, 70, pp439-462, 1987
- [4] 河合秀樹, 加藤保真, 棚橋隆彦: GSMAC 有限要素法による立方体キャビティ内の非定常三次元流れの解析 ($Re=1000$ と $Re=3200$ の場合), 日本機械学会論文集 (B 編) 55 巻 515 号, pp1922-1929, 1989
- [5] de Vahl Davis, G. and Jones I.P.: Natural Convection in a Square Cavity: A Comparison Exercise, Int. J. Num. Mesh. Fluids, 3, pp227-248, 1983
- [6] de Vahl Davis, G.: Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Bench Mark Numerical Solution, Int. J. Num. Mesh. Fluids, 3, pp248-264, 1983