CS－25　拡張個別要素法による連続体近似方法について

東洋大学　正会員　鈴木 崇伸
東洋大学　正会員　伯野 元彦

１．はじめに

近年破壊のシミュレーション方法として個別要素法が注目されているが、いろいろと提案された手法の中で、破壊前の連続体挙動から一連のプロセスを追跡できる拡張個別要素法は有用な構造解析ツールといえる。この方法は剛体的に空間を占めるＤＥＭ要素の間隙に仮想の媒質（間隙物質）を設定し、その変形特性をモデルにとりこむことで連続体近似を行えるとされている。仮想の媒質とは粒状体にモデル化できない微粒子の集まりであったり、コンクリートのモルタル分であったりするが、基本はＤＥＭの構造モデルの弾性挙動の再現であるといえる。現在提案されている拡張個別要素モデルは間隙バネ（pore-spring）をＤＥＭ要素間に設定し、拘束力とせん断力により非線形挙動する要素バネ（element-spring）と並列に作用させることでなめらかな弾性挙動を実現している。式（１）に目黒、伯野により提案されている１次元の波動方程式とのアナロジーから求められたバネ定数の設定方法を示す。

$$k_n = c_1 \rho v_P{}^2 l = c_1 E \quad , \quad k_t = c_2 \rho v_S{}^2 l = c_2 G \qquad (1)$$

ただしk_nは法線方向バネ、k_tは接線方向バネ、v_Pは縦波速度、v_Sは横波速度、Ｅはヤング率、Ｇはせん断剛性率、c_1，c_2は定数、l（＝１）は奥行きであり、この方法によりラーメン構造の解析などが行われている。一方で地盤のような２次元的な広がりをもった構造物に関しては、規則配列された骨組み構造でその骨格を表現する方法はあるが、詳細な検討はなされていない。そこで２次元弾性論にもとづき、ＤＥＭの相互作用力を計算する方法について考察する。

２．２次元弾性体の波動方程式との対比

等方弾性体の運動方程式を差分化したものと、ＤＥＭの運動方程式の復元力を対比して接触要素間の相互作用力を計算する方法を検討する。Ｈｏｏｋｅの法則にしたがう等方弾性体の運動方程式を式（２）に示す。

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) grad(div\mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} \qquad (2)$$

但しρは単位体積質量、λ、μはＬａｍｅの定数である。２次元弾性問題の場合、スカラポテンシアルとベクトルポテンシアル（スカラ量）を用いて変換することが可能であり、スカラポテンシアルをＢ，ベクトルポテンシアルをＡとすると

$$\mathbf{u} = (u, w) = gradB + rotA \qquad (3)$$

と表される。ここで次に示す２つの変数を考える。

$$b = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = div\mathbf{u} = \nabla^2 B \quad , \quad a = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{1}{2} rot\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\nabla^2 A \qquad (4)$$

ｂは微小部分の体積変化率、ａは剛体的回転量を表しており、Ｂ、Ａはともにスカラ量であるので、ｂ、ａは方向性のない変数となる。式（２）の右辺をｂ，ａを用いて変換すると式（５）が得られ、ｂおよびａの空間偏微分が弾性復元力を与える結果となっている。

$$\rho \ddot{u} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial b}{\partial x} - 2\mu \frac{\partial a}{\partial z} + \rho f_x \quad , \quad \rho \ddot{w} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial b}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial a}{\partial x} + \rho f_z \qquad (5)$$

さらにｂ，ａの１階微分を局座標変換して、差分化してみる。互いに接する円形の微小領域ｉ，ｊを考え、それぞれの領域内でｂ，ａは一定でϕ方向には変化しないとすれば、1階微分は次の片側差分の和として簡単に近似することができる。

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \sum \frac{\Delta b_{ij}}{\Delta r_{ij}} \cos\theta_{ij}, \quad \frac{\partial a}{\partial z} = \sum \frac{\Delta a_{ij}}{\Delta r_{ij}} \sin\theta_{ij}, \quad \frac{\partial b}{\partial z} = \sum \frac{\Delta b_{ij}}{\Delta r_{ij}} \sin\theta_{ij}, \quad \frac{\partial a}{\partial x} = \sum \frac{\Delta a_{ij}}{\Delta r_{ij}} \cos\theta_{ij} \qquad (6)$$

ただしθは互いに接する重心の方向を表している。ここでΔｂに起因する相互作用力を要素の接触点にて法線方向に与え、Δａに起因するものを接線方向に与えると、以下に示す個別要素の運動方程式が得られる。

$$m_i\ddot{x}_i + c_1\dot{x}_i = \Sigma(l_{ij}p_{ij} - m_{ij}q_{ij}) + F_x$$
$$m_i\ddot{z}_i + c_1\dot{z}_i = \Sigma(m_{ij}p_{ij} + l_{ij}q_{ij}) + F_z$$
$$p_{ij} = \Delta A(\lambda + 2\mu)\frac{\Delta b}{\Delta r} \quad , \quad q_{ij} = 2\Delta A\,\mu\frac{\Delta a}{\Delta r} \tag{7}$$

ただし、ｌ．ｍは接触方向の方向余弦であり、連続体運動時には回転はおこらないため要素の回転の運動方程式は省略している。

以上より剛体変位に加えて弾性挙動の自由度ｂ，ａを付加することで、２次元弾性体の運動をよく表せることが示された。連続体の運動を表すとき、自由度間の相互作用力は一定ではなく、ＤＥＭ要素の剛性、要素のサイズ、接触する方向、さらに変位の１階微分によって変化する量である。また復元力を変位の２階微分で考えず、２段階の１階微分に分割することで、計算は複雑になるが運動の特徴をよく近似できるようになった。

３．拡張個別要素の運動特性

以上説明した方法で２個の円形個別要素が接触している簡単なケースで、一方を固定し他方に単位変位を与えたときに２要素間の相互作用力がどのようになるかを計算してみる。なお連続体を近似したときの弾性復元力を問題にしているため、接触点ですべりはなく円形要素は回転しないものとする。図−２に示すように要素１と要素２が接しているときに、要素２に単位変位Δｕをｘ軸方向に加えると、式（１）によるバネの反発力の法泉方向の増分Δｐと接線方向の増分Δｑは次式となる。

$$\Delta p = c_1 E\Delta u\cos\theta \quad , \quad \Delta q = c_2 G\Delta u\sin\theta \tag{8}$$

一方、式（７）による相互作用力の増分は、要素の半径をそれぞれr_1，r_2、要素の面積をA_1，A_2としたときに次式となる。

$$\Delta p = \frac{A_2 E}{(r_1 + r_2)^2}\Delta u\cos\theta \quad , \quad \Delta q = \frac{A_2 G}{(r_1 + r_2)^2}\Delta u\sin\theta \tag{9}$$

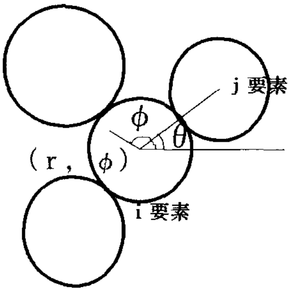
式（８）は要素の剛性と接触方向のみの関数として増分が計算されるのに比べて、式（９）ではさらに単位変位を加えた要素の面積と重心間の距離（自由度間の距離）が関係してくる。要素のサイズが異なる場合には、大きな要素に単位変位を与える場合の方が、相互作用力は大きくなることになる。１次元の波動が等径の要素配列を伝わるという前提で式（１）は導かれたが、要素サイズが変化する場合には対応していない。また式（１）では自由度間の距離の影響はバネ定数の中に含まれているが、式（９）では陽な形で残っている。

４．まとめ

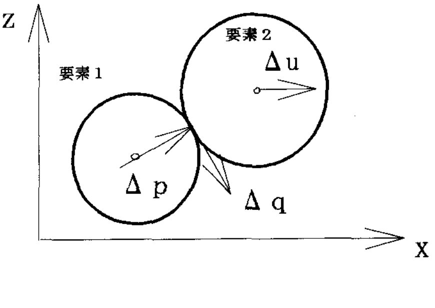
新しい構造解析手法である拡張個別要素法の連続体挙動時の要素間の相互作用力を計算する方法について考察を行った。その結果、波動ポテンシャルのラプラシアンを変数として付加し、片側差分近似することで、個別要素毎の相互作用力が計算できることが明らかになった。また２次元の弾性波動から求める相互作用力は要素サイズの影響を取り込んだ形となっている。今後この方法を地震応答解析に適用していく予定である。

（参考文献）

K.Meguro, M.Hakuno:Application of the Extended Distinct Element Method for collapse simulation of a double deck bridge, Proc. of JSCE NO.483/I-26, et al



図−１ 円形要素の接触図



図−２ 相互作用力の計算モデル