CS－21　砂のような粒状体の安定性に関する一考察

八戸工業大学　（正）飛田善雄

１。はじめに

砂のような非粘着性材料の変形・破壊挙動は複雑であり、その変形特性を忠実に表現しようとすると、構成式は当然複雑なものとなる。弾塑性体として定式化するとき、降伏条件と塑性ポテンシャルは一致しないとする非関連流動則を用いた方が、単調載荷時の変形挙動を表現するのに便利である。また、主応力軸が回転するような、いわゆる非比例負荷経路時の変形挙動の表現には、塑性ひずみ速度の方向が、与えられた応力・内部変数状態で唯一に決定されるのではなく、応力速度の方向に依存する性質（以下、増分非線形性と記す）を示す（増分非線形性の詳細な議論と関連する文献は、飛田・吉田(1993)参照）。非関連性や増分非線形などの性質を構成式に導入すると、初期値・境界値問題の解の安定性や唯一性が消失しやすいことは良く知られている（例えば、Rudnicki and Rice(1975)）。本文では、均一な変形を仮定したときの安定性について、非関連性と増分非線形性を取り入れた構成式を対象に検討する。

２。境界値問題の安定性と安定材料

初期値・境界値問題が与えられた時、得られた解の安定性の検討は工学的な問題に限らず、多くの分野で大事になる。安定性の検討は、Liapunovの安定性の規準を出発点とするものが多い。その規準は、′ある解に小さな乱れを与えたときに、対象とする系の応答の乱れが小さければ、その解は安定である′という動的な（そして数学的な）規準である(Bazant, 1991)。対象とする材料が摩擦／損傷による消散過程を含む場合には、安定性に対して弾性構造物ほど明確な議論はできないが、平衡状態にある静的系に対して、摂動をあたえることにより安定性の条件を求めることができ（例えばBruhns(1984)）微小変形理論の範囲内で記述すれば、

$$J=\int \dot{\sigma}:\dot{\varepsilon}\, dv=\int \dot{\sigma}:\dot{\varepsilon}^e+\dot{\sigma}:\dot{\varepsilon}^p\, dv>0$$

となる。弾性成分を表現する$\dot{\sigma}=E^e:\dot{\varepsilon}^e$は、どんな弾性ひずみ成分$\dot{\varepsilon}^e$に対しても、正値であると仮定する（この性質は$E^e$が正値性を持つと呼ばれる）のが常識であるから、第２項の塑性に関する部分$\dot{\sigma}:\dot{\varepsilon}^p>0$が全ての点で満足されるというより強い条件となりえる。最後の条件は、Druckerの局所的安定性として知られており、この性質を満足する（理想化された）材料を安定性材料と呼んでいる（例えば、Drucker(1988)、橋口(1990)）。すなわち、安定性材料とは、解の安定性を保証しうるような理想化された材料を意味している。いま、塑性ポテンシャルを用いて塑性ひずみ速度を決定する定式化を考えると、この条件（実際には、より緩い大局的安定条件であるが）は降伏関数の凸性と関連流動則を要求することになる。その結果として、応答の連続性や解の唯一性・安定性を、ひずみ硬化時には保証することになる（橋口pp.67-86）。

非関連流動則に基づく構成式は、ひずみ硬化時においても$\dot{\sigma}\dot{\varepsilon}<0$となり、解の安定性を保証しなくなる（詳しい議論は、例えばRunesson and Mroz(1989)参照)。砂のような粒状体は、$\dot{\sigma}\dot{\varepsilon}<0$となっても、排水変形時には巨視的には安定性の消失は生じないという実験結果が得られている（Lade et al.(1987))。すなわち、実際の砂は安定であるのに、非関連を有するモデル化をして数値計算を行なうと、不安定な挙動を示す可能性があるということである。これらのことより、非関連流動則に基づいたり、増分非線形を示す構成式を用いる場合には、あらかじめ解の安定性に対する構成式の性質を十分に把握しておく必要があることがわかる。

３。用いた構成式と安定性の計算

本研究で用いた構成式は、非関連流動則に基づくモデル（Tobita andYanagisawa(1992))と増分非線形性を示す二重すべりモデル（Tobita(1993))である．両者共に、修正応力法を用いて、異方的な応力・ひずみ関係を表現できる。

境界値問題の安定性の議論は、不均質な変形も考慮しうる全体系の剛性マトリックスに基づいて行なう必要がある。しかし、ここでは構成式自体の安定性を検証するために、一様な変形を想定して、$\dot{\sigma}:\dot{\varepsilon}>0$ の条件で安定性を議論する。対象とした構成式は両者ともに接線剛性マトリックスE($\dot{\sigma}=E:\dot{\varepsilon}$)が非対称であるから、$\dot{\varepsilon}:E:\dot{\varepsilon}>0$の正の定符号の議論は、Eを対称化した$E^*(E^*=(E+E^T)/2)$を用いて、$\dot{\varepsilon}:E^*:\dot{\varepsilon}$に対して議論することになる。ここでは、det[E*] の値を変形ステップ毎に計算することにより、最初にdet[E*]<0 となる応力比により構成式の安定性を検討している。また二重すべりモデルは増分非線形性をもつので、ひずみ速度の方向に応じて接線剛性マトリックスを変化させてその最小値を求める操作が必要であるが、ここでは、二つのすべり面が同時に活動するときの単調載荷時の剛性マトリックスにより安定性を判断している。対象とした応力経路は、平均応力一定の条件の下で、せん断応力が単調に増加する経路である。簡単のために、平面ひずみを想定し、２次元問題として解析している。

４。計算結果と考察

図１は、単調な応力経路下での２つのモデルの応力比・せん断ひずみ関係を与えている。q/p ($q=(\sigma_1-\sigma_2)/2$, $p=-(\sigma_1+\sigma_2)/2$;引っ張りを正とする）が0.6程度までは二重すべりモデル（図中MDSM）が、非関連流動モデル（MNAF)よりも硬い応答を示している。図２は、載荷に伴う非関連流動モデルのdet[E*]とdet[E] の変化の様子を示している。det[E*]が急速に減少していくことがわかる。図３は、弾性係数の比κ(κ=K/G)を変化させ、また等方性以外に、異方性も加味したときの計算結果である。弾性係数の比が安定性に大きな影響を与えることが理解できる。また、異方性を取り入れた結果、硬い応力・ひずみ関係を示す場合が安定性が高いことがわかる。全体として、増分非線形性を示す二重すべりの方が安定性が低いこともわかる。

ここで、示した安定性の計算の結果は初歩的な考察に基づくものであるが、それでも複雑な変形特性を取り入れた場合、言い換えると、古典的な弾塑性理論における関連流動則に基づくモデル以外では、安定性の検証が必要であることは示すことができたものと考えられる。今後、より精密な考察に基づいて、砂のような粒状体の安定性の検討を進めていきたい。

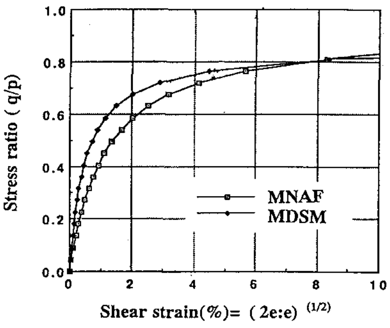

図１ ：対象とした構成式の応力比・せん断ひずみ関係

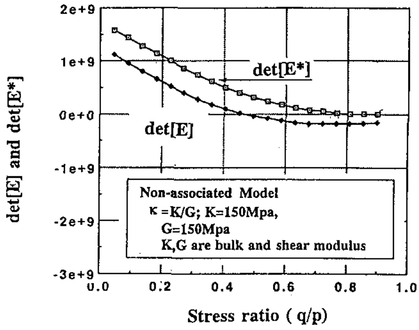

図２ ：非関連流動モデルにおける載荷に伴うdet[E]およびdet[E*]の変化

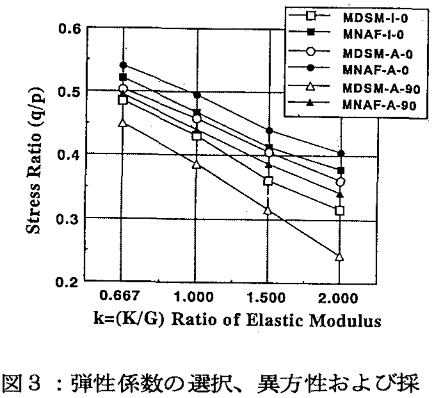

図３ ：弾性係数の選択、異方性および採用したモデルが安定性に及ぼす影響

参考文献

飛田・吉田(1993):構造工学論文集、Vol.39A, p387-398; Rudnicki and Rice(1975): J. Mech. Phys. Solids, Vol.12, pp.371-394; Bazant(1991): *Stability of Structures*, Oxford Univ. Press, Bruhns(1984): in *The constitutive law in thermoplasticity*, Springer Verlag, pp.465-539; Drucker(例えば、1988):Appl.Mech.Rev. Vol.41(4) pp.151-167;橋口(1990):*最新弾塑性学*、朝倉書店 ; Runesson and Mroz(1989): Int. J. Plasticity, Vol.5, pp.639-658; Lade et al.(1987): J. Eng. Mech. ASCE, Vol.113(9), pp.1302-1318; Tobita and Yanagisawa(1992): Soils and Fnds. Vol.32(1), pp.85-99; Tobita(1993): Mech. Mat. Vol.16, pp.91-100