

CS-17

材料の局所域に存在する不均質・異方性と散乱断面積

東海大学海洋学部 正員 北原道弘
岡山大学 工学部 正員 廣瀬壮一

1. はじめに

材料内の局所域に存在する不均質・異方性が散乱断面積(散乱波が有するエネルギーを面積次元で表したもの)に与える影響について検討したので、定式化の要点と一結果について報告する。散乱断面積に着目した理由は、不均質・異方性域が材料全体に分布した場合、波動の散乱による減衰が、第一近似として散乱断面積に比例するためである。

2. 不均質・異方性域中の波動場の処理

図1に示すように、均質・等方な弾性母材 D^e 内に存在する不均質・異方性域 D を考える。領域 D 内の波動場は次式によって支配される。

$$(C_{ijkl}(\mathbf{x})u_{k,l}(\mathbf{x}))_{,j} + \rho(\mathbf{x})\omega^2 u_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in D \quad (1)$$

いま、均質等方な材料定数

$$C_{ijkl}^* = \lambda^* \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu^* (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{kj}) \quad (2)$$

を導入して、物理量が座標 (x_1, x_2) だけの関数である2次元問題の場合について、式(1)を書き直すと次のようになる。

$$C_{\alpha\beta k\gamma}^* u_{k,\gamma}(\mathbf{x}) = -F_\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D \quad (3a)$$

$$C_{3\beta k\gamma}^* u_{k,\gamma}(\mathbf{x}) = -F_3(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D \quad (3b)$$

ここに、 k は1, 2, 3の値を α, β は1, 2の値を取る。また F_α と F_3 は次のような物体力項である。

$$F_\alpha(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})\omega^2 u_\alpha(\mathbf{x}) + \{(C_{\alpha\beta k\gamma}(\mathbf{x}) - C_{\alpha\beta k\gamma}^*)u_{k,\gamma}(\mathbf{x})\}_{,\beta} \quad (4a)$$

$$F_3(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})\omega^2 u_3(\mathbf{x}) + \{(C_{3\beta k\gamma}(\mathbf{x}) - C_{3\beta k\gamma}^*)u_{k,\gamma}(\mathbf{x})\}_{,\beta} \quad (4b)$$

式(3)の左辺の構造より、均質・等方な静弾性問題に対する基本解

$$U_\alpha^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\mu^*(\lambda^* + 2\mu^*)} \left\{ (\lambda^* + 3\mu^*)\delta_{\alpha\sigma} \ln \frac{1}{r} + (\lambda^* + \mu^*)r_{,\alpha}r_{,\sigma} \right\} \quad (5a)$$

$$U_3^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi\mu^*} \ln \frac{1}{r} \quad (5b)$$

を利用して、不均質・異方性領域 D 内の波動場 u_k に

対する積分表現を構成することができる。紙面の都合上、この積分表現を書き下すことは省略するが、式(3)と(4)からもわかるように一般的異方性領域 D の場合、2次元問題であっても面内成分と面外成分は分離しない。

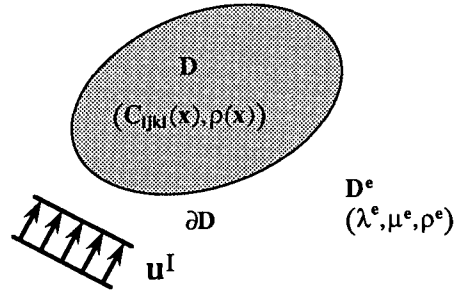


図1 不均質・異方性領域 D と均質・等方な外部領域 D^e

3. 均質・等方母材中の波動場の処理と解法

母材 D^e (図1参照) は均質・等方な弾性体と仮定しているため、外部領域 D^e に対しては通常の方法により境界積分方程式を定式化することができる。さらに、母材 D^e と不均質・異方性領域 D の境界 ∂D 上の変位と応力の連続条件を利用して、積分方程式系を構成し、これを解くことにより、境界 ∂D 上の変位と表面力を決めることができる。

4. 遠方散乱場

散乱断面積を求めるためには、遠方散乱場の表現が必要となり、これは次のように書ける。

$$\begin{aligned} u_\alpha^S &= \int_{\partial D} G_\alpha^\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_\gamma(\mathbf{y}) dS_y - \int_{\partial D} H_\alpha^\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_\gamma(\mathbf{y}) dS_y \\ &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_L^e |\mathbf{x}|}} e^{i(k_L^e |\mathbf{x}| - \pi/4)} \hat{x}_\alpha \Omega_L(\hat{\mathbf{x}}, \omega) \\ &\quad + \sqrt{\frac{2}{\pi k_T^e |\mathbf{x}|}} e^{i(k_T^e |\mathbf{x}| - \pi/4)} \hat{s}_\alpha \Omega_T(\hat{\mathbf{x}}, \omega) \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、 Ω_L が縦波の Ω_T が横波の散乱振幅である。また、 $\hat{\mathbf{x}}$ は座標原点から観測点の方向を向いた単位ベクトル、 $\hat{\mathbf{s}}$ は $\hat{\mathbf{x}}$ に直交する単位ベクトルである。後に必要となる縦波の散乱振幅を具体的に書き下すと次のようになる。

$$\Omega_L(\hat{\mathbf{x}}, \omega) = \int_{\partial D} \frac{i}{4\mu^e} \left(\frac{k_L^e}{k_T^e} \right)^2 \hat{x}_\gamma t_\gamma(\mathbf{y}) e^{-ik_L^e \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}} dS_y - \int_{\partial D} \frac{k_T^e}{4} \left(\frac{k_L^e}{k_T^e} \right)^3 \left(\frac{\lambda}{\mu^e} n_\gamma + 2n_\beta \hat{x}_\beta \hat{x}_\gamma \right) u_\gamma(\mathbf{y}) e^{-ik_L^e \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}} dS_y \quad (7)$$

ここに、 u_γ と t_γ は上記 3. の積分方程式系を解くことにより決まる散乱体表面上の変位と表面力である。

5. 散乱断面積

入射波を x_2 軸方向に伝播する単位振幅の平面縦波とする。

$$\mathbf{u}^I = \mathbf{e}_2 e^{i(k_L^e x_2 - \omega t)} \quad (8)$$

このとき、散乱断面積 σ^{sc} は前方縦波散乱振幅の実数部分として次のように得られる。

$$\sigma^{sc}(\omega) = -\frac{4}{k_L^e} \Re_e[\Omega_L(\theta = 0, \omega)] \quad (9)$$

ここに、 θ は入射波の伝播方向 (x_2 軸の正方向) から計った散乱角である。

6. 解析結果

不均質・異方性域を半径 a の円形インクルージョンとしてモデル化した一例を図2に示す。このモデルでは、図2の下側に描いたように、不均質性は半径 b と半径 a の円環領域でなめらかに変化している。図3は一解析例であり、不均質・異方性領域の半径 a で無次元化した母材中の縦波の波数 ak_L^e に対して、円の直径で無次元化した散乱断面積 $\sigma^{sc}/2a$ を図示したものである。パラメーターは、不均質・異方性領域内の弾性定数であり、次の4つのケースを考えている。白丸 (Case1) が半径 a の領域内で $C_{11}/\mu^e = 1.5$, $C_{12}/\mu^e = 0.5$, $C_{22}/\mu^e = 1.5$, $C_{44}/\mu^e = 0.5$ と選んだ場合であり、これらの定数は比較の基本とするために、均質・等方なインクルージョンと一致するように選ばれている。

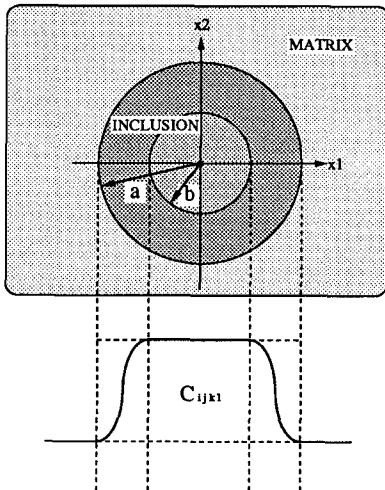


図2 不均質・異方性域のモデル化と剛性分布のイメージ

る。白い四角 (Case2) は波動の伝播方向の剛性 C_{22}/μ^e を Case1 の場合の $1/3$ に下げた場合である。黒丸 (Case3) は Case1 に不均質性を入れたもので、 $C_{11}/\mu^e = 1.5g(r)$, $C_{12}/\mu^e = 0.5g(r)$, $C_{22}/\mu^e = 1.5g(r)$, $C_{44}/\mu^e = 0.5g(r)$ とし、半径 r 方向に変化する関数 $g(r)$ を次のように選んでいる。

$$g(r) = \frac{1}{2} \cos(4\pi r/a) + \frac{3}{2}, (b = \frac{3a}{4} \leq r \leq a)$$

黒い四角 (Case4) は Case3 の C_{22}/μ^e を $1/3$ に下げた場合である。全体的にみた特徴は、波動の伝播方向の剛性 C_{22} が低下した場合には、散乱断面積にはほぼ周期的な振動現象がみられる点にある。

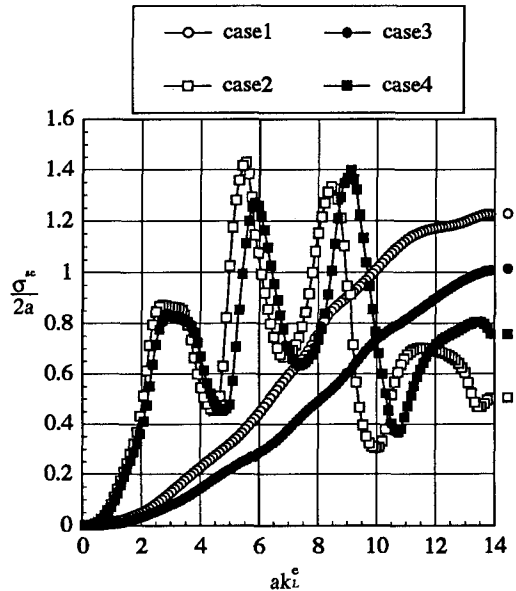


図3 散乱断面積への異方性、不均質性の影響の検討
(○：均質・等方，□：均質・異方性，●：不均質・等方，■：不均質・異方性)

7. おわりに

紙面の都合上、ここでは一解析例を示すに止まったが、他の解析例も含めて判断して、いくつかの方向から波動を入射することが可能である場合、散乱断面積 ($\propto$ 散乱エネルギー) に周波数軸上で振動が生じることをもって、その方向の剛性低下が生じていると予測できる可能性がある。どの程度剛性低下が生じているかを予測することがより重要と思われる。これには、振動周期が関係していると予測しているが、この関係式を具体的に書き下すには至っていない。