CS－6

非関連弾塑性体の不連続面形成に関する基礎的研究

武蔵工業大学　学生員　長野竜馬
武蔵工業大学　正会員　吉川弘道
武蔵工業大学　学生員　服部尚道

1.　まえがき

準脆性材料において、塑性変形過程に材料のひずみが局所化することはよく知られている。実験で観察されるせん断帯の形成は典型的な局所化した例である。

本研究では、局所化に対する特性テンソルを用い、局所化の発生基準に対する定式化を行う。さらに、局所帯の形成方向 $\mathbf{N}$ と運動方向 $\mathbf{M}$ について検討するものである。

2.　変形に関する適合条件と材料構成則

まず、発生する不連続面において変位速度 $\dot{\mathbf{u}}$ は連続、変位速度勾配 $\nabla\dot{\mathbf{u}}$ は不連続なものと考える。これは C^0 連続体と呼ばれ、本研究の基本仮定であり、次式のように表すことができる。

$$[[\dot{\mathbf{u}}]] = \dot{\mathbf{u}}^+ - \dot{\mathbf{u}}^- = \mathbf{0} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$[[\nabla\dot{\mathbf{u}}]] = \nabla\dot{\mathbf{u}}^+ - \nabla\dot{\mathbf{u}}^- \neq \mathbf{0} \quad \cdots\cdots (2)$$

ここで、上付きの〝＋〟と〝－〟は不連続面の正側と負側の値を示し、括弧は両者の相対的な差を表している。また、Maxwell の適合条件により、変位速度勾配の差 $[[\nabla\dot{\mathbf{u}}]]$ は次式で与えられる。

$$[[\nabla\dot{\mathbf{u}}]] = \dot{\gamma}\mathbf{M}\otimes\mathbf{N} \quad \cdots\cdots (3)$$

$$[[\dot{\epsilon}]] = \frac{1}{2}([[\nabla\dot{\mathbf{u}}]]+[[\nabla\dot{\mathbf{u}}]]^T) = \frac{\dot{\gamma}}{2}(\mathbf{M}\otimes\mathbf{N}+\mathbf{N}\otimes\mathbf{M}) \quad (4)$$

上式において、ベクトル $\mathbf{N}$ は不連続面の直交方向、ベクトル $\mathbf{M}$ は不連続部の相対的な運動方向を表し、$\mathbf{N}$、$\mathbf{M}$ ともに単位ベクトルである。また、スカラー $\dot{\gamma}$ は、変位速度勾配の大きさを表し、不連続面の発生時には不定となる[2)]。図-1 に不連続面とベクトル $\mathbf{N}$、$\mathbf{M}$ の構成を示す。

次に、局所化の開始直前までは材料が一様塑性状態にあると仮定するので、不連続面に相対する両側の構成関係式は、共通な弾塑性接線剛性テンソル $\mathbf{D}_{ep}$ によって表される。さらに、応力速度についても、$[[\dot{\sigma}]] = \dot{\sigma}^+ - \dot{\sigma}^-$ によって示される応力の不連続量を生じるため、次式のような構成表現で与えられることがわかる。

$$[[\dot{\sigma}]] = \mathbf{D}_{ep} : [[\dot{\epsilon}]] \quad \cdots\cdots (5)$$

3.　特性テンソルの定義と局所化の発生条件

弾塑性材料における不連続解析に関して、いわゆる局所化に関する特性テンソル $\mathbf{Q}_{ep}$ が用いられ、これは2階のテンソルとして次式のように定義される。

$$\mathbf{Q}_{ep} = \mathbf{N}\cdot\mathbf{D}_{ep}\cdot\mathbf{N} \quad \cdots\cdots (6)$$

ここで、不連続面に相対する両側の応力は不連続 $(\dot{\sigma}^+ \neq \dot{\sigma}^-)$ となるが、不連続面に作用するベクトル $\dot{\mathbf{t}}$ (traction) は連続でなければならない。すなわち、

$$[[\,\dot{\mathbf{t}}\,]] = \mathbf{N}\cdot[[\,\dot{\sigma}]] = 0 \quad \cdots\cdots (7)$$

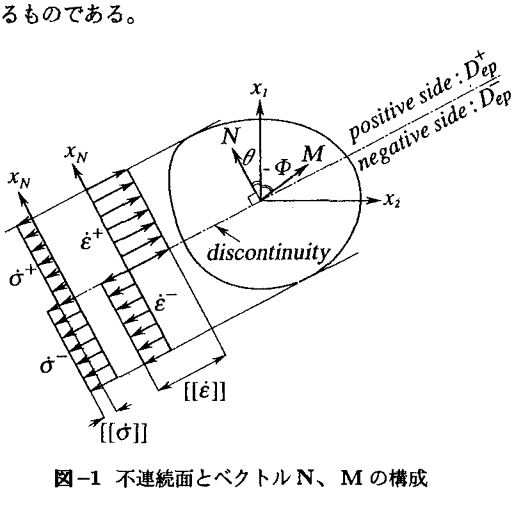
となる。上式に、式(4)、(5)を代入すると、次式を得ることができる。

$$\dot{\gamma}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{D}_{ep}\cdot\mathbf{N})\cdot\mathbf{M} = \dot{\gamma}\mathbf{Q}_{ep}\cdot\mathbf{M} = 0 \quad \cdots\cdots (8)$$

よって、式(8)の非自明解が $\dot{\gamma} \neq 0$、$\mathbf{M} \neq 0$ の条件の下に存在することが、不連続面形成の必要条件となる。これは特性テンソルの行列式が、

$$det(\mathbf{Q}_{ep}) = 0 \quad \cdots\cdots (9)$$

となる必要がある。従って、$det(\mathbf{Q}_{ep}) \neq 0$ の時は、$\dot{\gamma} = 0$ となり、不連続面は形成されないことを意味する。これは、局所化に関する特性テンソルが分岐問題において本質的な役割を果すものであることを示唆するものである。



図－1　不連続面とベクトル N、M の構成

4.　2次元場における解析結果

ここで、2次元場における弾塑性体を対象とした $Drucker - Prager$ 型の弾塑性構成則を考え、不連続面の発生時期と形成方向・運動方向について考察する。この場合、降伏関数 f および塑性ポテンシャル関数 q については、次のように表示される。

$$f = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

$$q = \beta I_1 + \sqrt{J_2} - k' = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

ここで、$I_1 = \sigma_{ii}$、$J_2 = \frac{1}{2}S_{ij}S_{ji}$ で表される。また、上式における偏差応力 S_{ij} は、$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}I_1\delta_{ij}$ で定義される。係数 α、β は、f および q における静水圧依存性を表すパラメータを示している。

まず、2次元場における特性テンソル Q^{ep}_{bc} は、

$$Q^{ep}_{bc} = N_a D^{ep}_{abcd} N_d \quad (a, b, c, d = 1, 2) \quad \cdots\cdots (12)$$

のように定義され、このときのベクトル N_a と対応する固有ベクトル M_a を次のように記す。

$$N_a = (\cos\theta, \sin\theta)^T \ , \ M_a = (\cos\phi, \sin\phi)^T \quad \cdots (13)$$

ここで、θ と ϕ は図-1で定義した通りである。

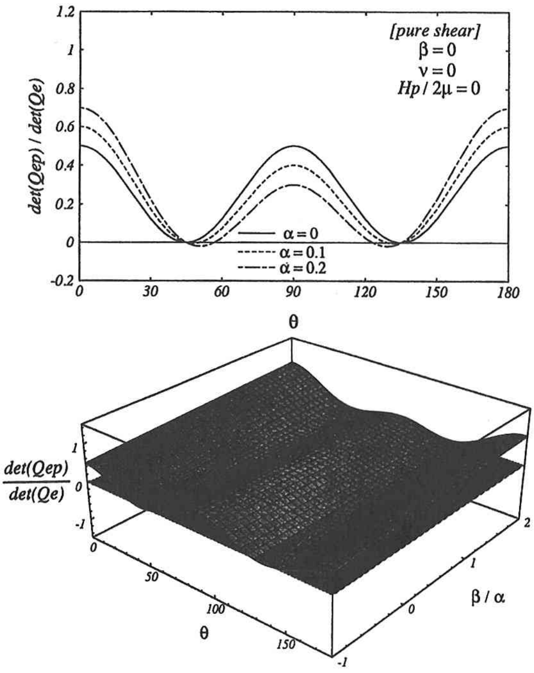
以下、数値シミュレーション結果を示すが、図中の縦軸は $det(\mathbf{Q}_{ep})/det(\mathbf{Q}_e)$ のように、弾塑性特性テンソルの行列式を、弾性材料に対する特性テンソルの行列式（常に $det(\mathbf{Q}_e) > 0$）で正規化したものであり、θ についての最小値が重要となる。

まず、図-2では、$\alpha \neq \beta$ の場合 $det(\mathbf{Q}_{ep})$ の最小値は負となるので、硬化過程中に局所化することがわかる。また、β/α が大きいほど θ^{crit} が大きくなる。

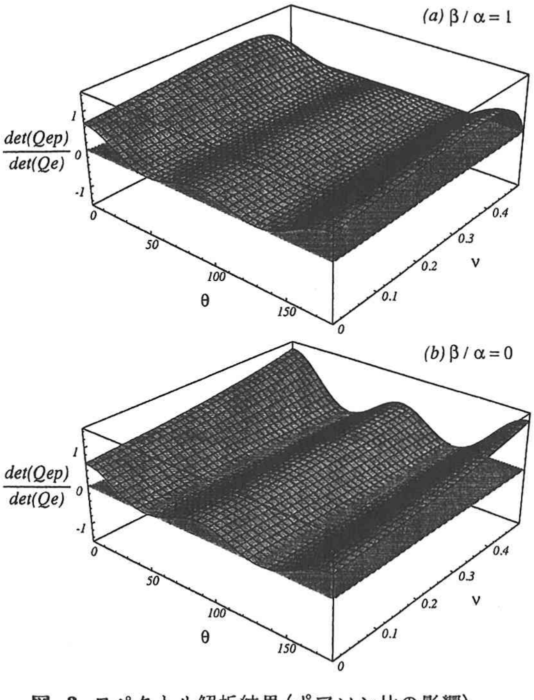
図-3では、同じく純せん断（平面ひずみ）の場合であるが、非関連流れ則のとき、$det(\mathbf{Q}_{ep})$ の最小値は負となり、かつポアソン比 ν による影響を受けることがわかる。

参考文献

1) **Yoshikawa, H. :** ***Fundamental Study on Strain Localization as Bifurcation Problem for Elasto-Plastic Materials*** , Research Report, CEAE-Department, Univ. of Colorado at Boulder, 43 pp. , 1993.
2) Hill, R. : ***A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-Plastic Solids*** , Mechanics and Physics of Solids, 6, pp.236-249, 1958.



図−2 スペクトル解析結果（β の影響）
pure shear[plane stress]: $\alpha = 0.1$



図−3 スペクトル解析結果（ポアソン比の影響）
pure shear[plane strain]: $H_p = 0,\ \alpha = 0.1$