

CS-5

特性テンソルの固有値解析による分岐条件の定式化

武蔵工業大学 正会員 吉川弘道
武蔵工業大学 学生員 長野竜馬

1. 特性テンソルの固有値解析

併報¹⁾で議論された局所化の開始条件と不連続面の方向および運動方向に関して、今度は局所化に関する特性テンソルの固有値問題として考える。ここでは、Runneson et al²⁾が用いた一般化特性方程式をそのまま採用するが、より一般的な導出方法で分岐モードに対する固有値、固有ベクトルを求解した。

局所化に関する2階の弾塑性特性テンソル Q_{jk}^{ep} に対する次式のような一般化特性方程式を考える²⁾。

$$Q_{jk}^{ep} M_k = \lambda Q_{jl}^e M_l \quad (j, k, l = 1, 2, 3) \quad (1)$$

従って、 λ は固有値、 M は固有ベクトルとなる。ここで、 N_j を、不連続面の法線ベクトルとすると、

$$Q_{jk}^{ep} = Q_{jk}^e - Q_{jk}^p$$

$$Q_{jk}^e = N_i E_{ijkl}^e N_l, \quad Q_{jk}^p = N_i E_{ijkl}^p N_l \quad (2)$$

次に、接線形弾塑性テンソル $D^{ep} = E^e - E^p$ を導入し、

$$E_{ijkl}^e = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right\} \quad (3)$$

$$E_{ijkl}^p = \frac{E_{ijmn}^e m_{mn} n_{pq} E_{pqkl}^e}{H_p + n_{mn} E_{mnrs}^e m_{rs}} \quad (4)$$

のように記述する。上式で、 H_p は塑性係数、 $m_{ij} = \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}}$ 、 $n_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ (f は負荷関数、 q は塑性ポテンシャルを示す。) 従って、弾塑性特性テンソル Q_{jk}^{ep} を次のように表すことができる。

$$Q_{jk}^{ep} = Q_{jk}^e - \frac{b_j a_k}{H_p + n_{mn} E_{mnrs}^e m_{rs}} \quad (5)$$

ただし、 $a_i = n_{kl} E_{klij}^e N_j$ 、 $b_i = N_j E_{jikl}^e m_{kl}$

以上のように準備した特性方程式に基づき、次式のように固有値と固有ベクトルを導出することができる。

$$\lambda = 1 - \frac{a_i [Q_{ij}^e]^{-1} b_j}{H_p + n_{mn} E_{mnpq}^e m_{pq}} = 1 - [Q_{ij}^e]^{-1} Q_{ji}^p \quad (6)$$

$$M_i = \xi [Q_{ij}^e]^{-1} b_j$$

$$\text{ここで、} \xi = \frac{a_k M_k}{(1-\lambda)(H_p + n_{mn} E_{mnpq}^e m_{pq})} \quad (7)$$

2. 分岐条件に関する解析解(臨界点の定式化)

このような弾塑性材料の分岐条件は、 $\lambda = 0$ に対する固有モードを調べればよく、このときの塑性係数 H_p は、次式で与えられる。

$$H_p^* = -n_{ij} E_{ijkl}^e m_{kl} + a_k [Q_{ki}^e]^{-1} b_l \quad (8)$$

分岐条件を満足する塑性係数をとくに、 H_p^* と記述する。以上のように、分岐条件を満足する塑性係数 H_p^* は、いくつかのパラメータを含むので、一般に

$$H_p^* = H_p^*(n_{ij}, m_{ij}, N_k, E, \nu) \quad (9)$$

のように表示することができる。ここで、ベクトル N_k 以外は材料および荷重条件が特定されたとき既知量となるので、通例の弾塑性体に対する分岐臨界点は、塑性係数 H_p^* が、次式のように臨界塑性係数 H_p^{crit} となるとときに与えられる(図-1)。

$$H_p^{crit} = \max_{N_k} [H_p^*] \quad |N_k|=1 \quad (10)$$

$$\frac{\partial H_p^*}{\partial (N_k^2)} \bigg|_{|N_k|=1} = 0, \quad \frac{\partial^2 H_p^*}{\partial (N_k^2)^2} \bigg|_{|N_k|=1} < 0 \quad (11)$$

すなわち、上式を満足する N_k が最弱面の法線ベクトルを表し、その直交方向に不連続面として形成される。また、上式を満たす H_p^* を H_p^{crit} とし、そのときの N_k を N_k^{crit} およびその角度を θ^{crit} 、対応する固有

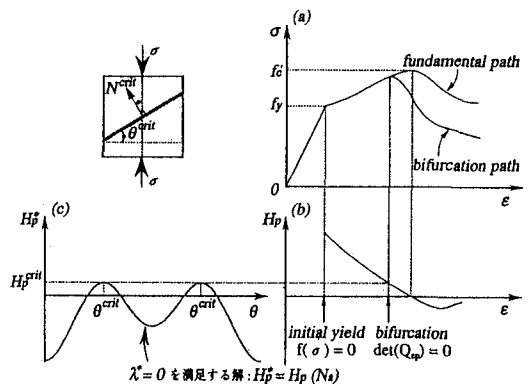


図-1 (a)Schematic description of fundamental/bifurcation path, (b)Plastic modulus H_p , (c)Spectral analysis of plastic modulus

ベクトルを M_k^{crit} およびその角度を ϕ^{crit} のように記述するものとする。

従って、図-1に示したように、ある予想される塑性履歴において、塑性係数が $H_p^* = \max[H_p^*]$ となった時点で、まず最初の分岐条件 ($\lambda = 0$) を満足することになり、不連続面の形成に至ると考えられる。

3. Drucker-Prager 条件に基づく解析例³⁾

次に、Drucker-Prager 型の非関連流れ則

$$f = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (12)$$

$$q = \beta I_1 + \sqrt{J_2} - k' = 0 \quad (13)$$

を適用し、平面応力場と平面ひずみ場に対して具体的な導出結果を提示する。すなわち、ベクトル N_k^{crit} の方向 θ^{crit} は、次式で表される。

$$\tan^2 \theta^{crit} = -\frac{S_2 + \sqrt{J_2}(\alpha + \beta)}{S_1 + \sqrt{J_2}(\alpha + \beta)} \quad (14a)$$

$$\tan^2 \theta^{crit} = -\frac{(S_2 + \nu S_3) + (1 + \nu)\sqrt{J_2}(\alpha + \beta)}{(S_1 + \nu S_3) + (1 + \nu)\sqrt{J_2}(\alpha + \beta)} \quad (14b)$$

$$\frac{H_p^{crit}}{E} = \frac{(\alpha - \beta)^2}{4} \geq 0 \quad (15a)$$

$$\frac{H_p^{crit}}{E} = \frac{1}{4(1 - \nu)} \{2(\alpha - \beta)^2 - (1 - \nu) \left(\frac{S_3}{\sqrt{J_2}} + \alpha + \beta \right)^2\} \quad (15b)$$

ここに、上式の式番号は a: 平面応力、b: 平面ひずみを示す。式 (15a) は、非負であることを示しているが、 $\alpha = \beta$ の場合 $H_p^{crit} = 0$ 、 $\alpha \neq \beta$ の場合 $H_p^{crit} > 0$ となり、例えば、 $\alpha = 0.1$ 、 $\beta = 0$ のとき $H_p^{crit}/E = 0.0025$ となる。すなわち、平面応力では、関連流れ則の場合、応力ピーク点 ($H_p = 0$) において、また、非関連流れ則の場合、応力ピーク前の硬化過程 ($H_p > 0$) において、局所化が開始することを意味する。

以上の解析結果を用い、図-2に、非関連流れ則とした場合の平面ひずみ場における θ^{crit} と応力比 $e = \sigma_2/\sigma_1$ ($\sigma_1 < 0$: 圧縮) との関係を示した。平面ひずみの場合、ポアソン比 ν の影響により、局所化を起こす応力比 e の範囲が拡大しており (平面応力では、 $-1 < e < 0.62$ であった)、 ν が大きいほど θ^{crit} が大きくなることがわかる。

次に、平面応力における θ^{crit} および、これに対応する $\theta^{crit} - \phi^{crit}$ と応力比 e の関係を求め、図-3に併記した。ここで、不連続面の法線ベクトルの方向 θ^{crit} と不連続運動方向 ϕ^{crit} との交角 ($\theta^{crit} - \phi^{crit}$) は、相対

的な動きの方向を表しており、破壊力学におけるモード分類に従い、 $\theta^{crit} - \phi^{crit} = 0^\circ$ を Mode 1、 $\theta^{crit} - \phi^{crit} = 90^\circ$ を Mode 2 と呼ぶ。

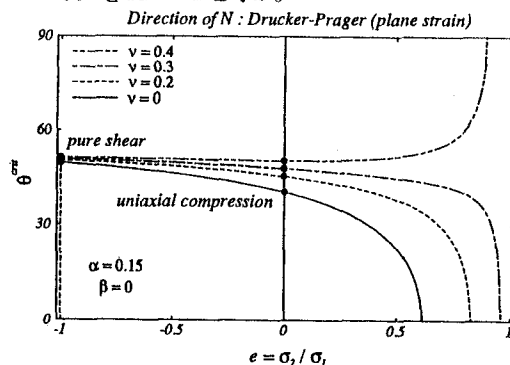


図-2 Direction of N^{crit} in plane strain (influence of ν)

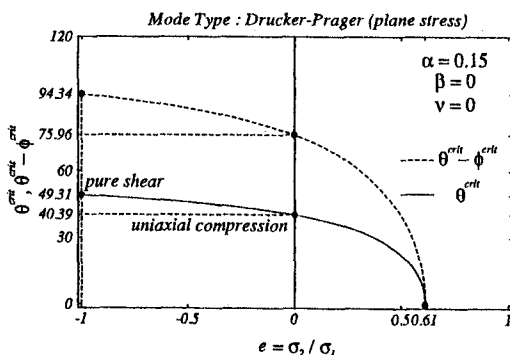


図-3 Direction of N and M in plane stress

4. あとがき

本文および併報¹⁾は、弾塑性材料に対する分岐条件の発生時期と不連続面の角度・運動方向を考察したものである。これらはいずれも構成則レベルにおける言わばモード解析である。

従って、境界値問題への発展、および分岐後の挙動解析が次の課題である。

参考文献

- 1) 長野竜馬、服部尚道、吉川弘道：非関連弾塑性体の不連続面形成に関する基礎的研究、土木学会第49回年次学術講演会講演概要集、1994年。
- 2) Runesson, K., Ottosen, N. S., and Peric, D.: *Discontinuous Bifurcation of Elasto-Plastic Solutions in Plane Stress and Plane Strain*, International Journal of Plasticity, Vol.7, pp.99-121, 1991.
- 3) 服部 尚道：弾塑性材料におけるひずみの局所化に関する解析的研究、武蔵工業大学修士論文、68 pp, 1994年。