土木学会第49回年次学術講演会（平成６年９月）

# CS－4　熱力学的定式化による変形の局所化の理論と解析手法

東京大学　学生員　井上純哉
東京大学　正　員　堀井秀之

## 1. まえがき

変形の局所化現象は異なる材料において共通に起こる現象であり、材料・構造物の強度を支配している為、工学的に重要な問題である。変形の局所化現象においては、微視的構造が相互に干渉することにより、力学的エネルギーの散逸 (非弾性変形やクラックの進展) が材料全体で連続的に発生するモードから局所的に起こるモードに移行するものと考えられる。本研究は、簡単なばね-摩擦モデルでの考察を拡張することにより、一般性のある変形の局所化の理論と解析手法を提案するものである。

## 2. 例題:ばね-摩擦モデル

### (1) 強形式

図1に示すようなばねと摩擦を組み合わせたモデルを考える。ここで、$\alpha$を摩擦面の滑べり量、$u$を載荷点での変位とし、摩擦力$f$が滑べり量$\alpha$の関数として$f = f_0 + A\alpha$と表されるとする。この時、次の関係が成り立つ、

$$k(u-\alpha) - F = 0 \quad \cdots\cdots (1)$$

$$k(\alpha - u) + f_0 + A\alpha = 0 \quad \cdots\cdots (2)$$

これより、$u = (F - f_0)/A + F/k$、$\alpha = (F - f_0)/A$ となる。また、この解の安定性は、このつり合いの解に微小の変動を与える時、外系よりなされるべき仕事の正負で判定される。

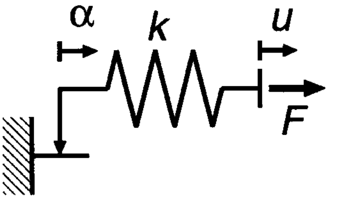

図１ ばね-摩擦モデル

### (2) 変分問題

以上の定式化と等価な変分問題を考える。

$$I = \frac{1}{2}k(u-\alpha)^2 - Fu + f_0\alpha + \frac{1}{2}A\alpha^2 \quad \cdots\cdots (3)$$

とすると、$I$を停留させる $u$、$\alpha$は式 (1)・(2) の解と一致する。また、式 (3) にその解 $u = u(\alpha) = \alpha - F/k$ を代入して得られる $I^*(\alpha) = I(u(\alpha), \alpha)$ に対して $d^2I^*/d\alpha^2$を計算すれば、その正負は前述の解の安定性と対応している。

## 3. 変形の局所化の理論と解析手法

式 (3) は、系の力学的トータルポテンシャルエネルギーと、その散逸によって失われる熱エネルギーの和を表している。例えば、境界値問題となるような他の問題についても、後者の熱力学的定式化による変分問題の解は、前者の強形式の解と一致する。強形式から等価な変分問題を導くかわりに、熱力学的考察により凡関数$I$を容易に求めることができる。解の安定性はエネルギー曲面 $I^*(\alpha)$ の曲率の主値の正負 (上に凸か下に凸か) によって判定され、これも物理的直観と一致している。次章で、変分問題として定式化された変形の局所化の理論を連続体に適用した例を示す。

## 4. 連続体に於ける変形の局所化の解析

粘土の様に粘着力のみがあり、摩擦力の無い材料を考える。材料は最大せん断応力$\tau$がせん断強度$c$に達するまでは線形弾性体であり、$\tau = c$で最大せん断力方向にすべり面が発生し、その後せん断応力$\tau$はすべり量$\alpha$の関数として$\tau = c_0 + A\alpha$となるものとする。

今この材料の一軸圧縮試験を考え、問題を図2に示すメッシュ分割により有限要素法を用いて解析する。各要素で最大せん断応力がせん断強度$c$に達した時、要素内に一本のすべり面が発生するものとする。この時、

要素内の平均的非弾性ひずみは

$$\varepsilon^I_{ij} = \frac{\alpha}{V}\int_S \frac{1}{2}(n_i s_j + n_j s_i)\,dS \quad \cdots\cdots (4)$$

となる。ただし、$n_i$はすべり面の法線ベクトル、$s_i$はすべりの方向ベクトル、$S$はすべり面の表面である。$I$は

$$I = \frac{1}{2}\int_\Omega (\varepsilon^E_{ij} - \varepsilon^I_{ij}) D_{ijkl} (\varepsilon^E_{ij} - \varepsilon^I_{ij})\,d\Omega - \int_{\delta\Omega} F_i u_i\,d\delta\Omega + \sum_i S_i(c\alpha + \frac{1}{2}A\alpha^2) \quad (5)$$

と表される。式(4)を式(5)に代入し離散化し$\delta I = 0$より、

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\alpha} \\ K_{\alpha u} & K_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ -S^\alpha c \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots (6)$$

となり、これより解$(u, \alpha)$が求まる。その解の安定性を判定するためのヘシアンは、

$$\left[\frac{\partial^2 I^*}{\partial\alpha_i \partial\alpha_j}\right] = K_{\alpha\alpha} - K_{\alpha u} K^{-1}_{uu} K_{u\alpha} \quad \cdots\cdots (7)$$

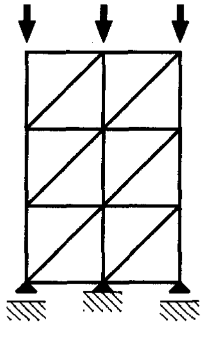

**図２** メッシュ

で得られ、この行列の固有値の正負を調べることで、同時に$\tau = c$に達した全ての要素ですべり面が発達し、すべり量が増加するという式(7)の解の安定性が判定される。

図2に示すメッシュを用いて実際にヘシアンを計算した結果、$A \geq 0$の時は固有値は全て正で図3に示すように(○が滑べりが発生する要素)材料全体で摩擦すべりが進行し、$A < 0$の時は負の固有値が存在する。このことは図3の様な解が不安定であり変形が局所的に発生することを意味している。$A < 0$の場合、負の固有値の固有ベクトルを調べることにより、すべり面が発生せず、単に弾性除荷される要素が判定される。すなわち、絶対値が最小となる固有ベクトルの成分に対応した要素で、弾性除荷が生じる。この例題では図4の様に、せん断帯(すべり面)が形成されるという解が求まる。図4に示すモードに破壊のモードが移行した後のヘシアンの固有値は常に正である為、このモードにおける破壊は安定して進行することが解る。

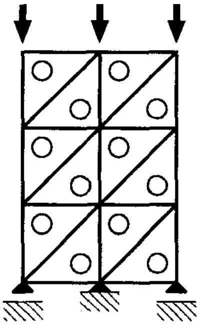

**図３** $A \geq 0$

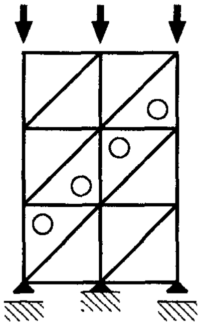

**図４** $A < 0$

## 5. まとめ

本研究で提案する変形の局所化理論は一般性の高いものであり、力学的エネルギーの散逸が局所化する多くの現象に適用できるものと考えられる。