CS-3　有限変形弾塑性体におけるせん断帯生成条件

金沢大学　正会員　○矢富盟祥・石田　啓

1. はじめに　近年，せん断変形が局所的に大きくなるせん断帯の研究が活発になってきている．特にせん断帯生成の必要条件は，土とか岩などを含む物質においてもその発生条件と方向を予測するのに数多く応用されている．しかしながら，それらのほとんどの理論的研究はその解析の複雑性を回避するため微小変形論に限られている．(例えば，文献１)，２)，３))

一般にせん断帯は，過大な圧縮応力のもとで室内実験や地層の断層などにしばしば観察され，この場合，変位は小さくても，局所的せん断変形，回転は非常に大きいこと，また応力と塑性ひずみ速度の非共軸モデルでは，せん断変形が進むと，弾性せん断係数が小さくなり，限界状態近傍において，応力の大きさと同程度になり，もはや微小変形理論ではその適用に限界があり，物質の変形挙動をより正確に理解するためにも，有限変形理論で考察することが重要となる．

そこで，本研究では，まずコーシー応力のJaumann速度を用いた弾塑性体の有限変形におけるせん断帯生成条件に必要な塑性硬化係数を一般的な直接表記（Direct Notation）による表現を得た．次に硬化係数のせん断帯方向に関する最大値を求めるため，その変数をせん断帯方向$\boldsymbol{n}$ ($\|\boldsymbol{n}\|=1$) から異なる偏差応力による３つのモール円によって構成される偏差表面応力ベクトルの水平τおよび垂直成分Sに変換した[2)3)]．次にその定義域内で，場合分けをし，限界硬化係数およびせん断帯の方向について分類し，それぞれの場合における限界硬化係数およびせん断帯の方向を偏差応力と弾性係数による表現を求めた．最後に，Rudnicki and Riceが用いた表記法[1)]によって，彼らの得た微小変形論を有限変形に拡張した一般的表現を求めた．

2. 構成式とせん断帯生成必要条件　コーシー応力$\boldsymbol{T}$のJaumann速度$\mathring{\boldsymbol{T}}$と，変形速度$\boldsymbol{D}$が線形関係にある次式のように表される弾塑性体を考える．

$$\mathring{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{C}^{ep}[\boldsymbol{D}] \quad \cdots\cdots (1)$$

ここで，$\boldsymbol{C}^{ep}$は増分弾塑性係数（４階）テンソルであり，hを塑性硬化係数とし，$\boldsymbol{P}$と$\boldsymbol{Q}$を，正規化されたコーシー応力の２階テンサー値テンサー関数とすると

$$\boldsymbol{C}^{ep}=\boldsymbol{C}^{e}-\frac{\boldsymbol{C}^{e}[\boldsymbol{P}]\otimes\boldsymbol{C}^{e}[\boldsymbol{Q}]}{h+\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{C}^{e}[\boldsymbol{Q}]} \quad \cdots\cdots (2)$$

で与えられる．上式中の$\boldsymbol{C}^{e}$は，等方弾性係数（４階）テンサーであり，G，λをLame係数（ここでは，必ずしも定数ではなく，一般的にはコーシー応力の不変量の関数でよい．）とすると，$\boldsymbol{C}^{e}=2G\boldsymbol{I}+\lambda\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{\delta}$で定義される．

せん断帯の発生必要条件は，応力の連続性を仮定した時のその面上での速度勾配の差をランクone $[\boldsymbol{L}]=\boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{n}$とした時，

$$[\dot{\boldsymbol{T}}]\boldsymbol{n}=\boldsymbol{o} \quad \cdots\cdots (3)$$

を用いて，Continuous localizationの場合，式(2)，(1)を式(3)に代入して

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{g}=\boldsymbol{o}$$

が，非自明解を持つための条件

$$det\boldsymbol{B}=det(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{C}^{e}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{A}-\frac{\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}}{h+\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{C}^{e}[\boldsymbol{Q}]})=0 \quad \cdots\cdots (4)$$

となる．ここで，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \frac{1}{2}[(\boldsymbol{Tn}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{Tn}\otimes\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{nT}-\boldsymbol{T}]\\
\boldsymbol{a} &= 2G\boldsymbol{Pn}+\lambda(tr\boldsymbol{P})\boldsymbol{n}\\
\boldsymbol{b} &= 2G\boldsymbol{Qn}+\lambda(tr\boldsymbol{Q})\boldsymbol{n}
\end{aligned}
$$

である．次に，$\boldsymbol{B}_e=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{C}^e\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{A}$とおくと，式(4)より次式が得られる．

$$
H \stackrel{\mathrm{def}}{=} h+\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{C}^e[\boldsymbol{Q}]=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{B}_e^{-1}\boldsymbol{a} \quad\cdots\cdots (5)
$$

式(5)で，変数$\boldsymbol{n}$ ($\|\boldsymbol{n}\|=1$)をコーシー応力の偏差$\boldsymbol{S}$を用いて$S=\boldsymbol{Sn}\cdot\boldsymbol{n}$，$\tau=\boldsymbol{Sn}\cdot\boldsymbol{Sn}-S^2$ に変えると

$$
\begin{aligned}
H &= \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{B}_e{}^{-1}\boldsymbol{a}=\frac{1}{(2G+\lambda)\{4(G+\frac{1}{2}S)(G+S)+S^2+\tau^2-J_2\}}\\
&\times [\{4(2G+\lambda)(G+S)+S^2+\tau^2-J_2\}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})-\{4(G+\frac{1}{2}S)(G+\lambda)+\tau^2+S^2\}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n})\\
&- 2(2G+\lambda)(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{Sn}\cdot\boldsymbol{b})-2(\lambda-S)(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{Sn}\cdot\boldsymbol{a})+\{2(2G+\lambda)+S\}(\boldsymbol{Sa}\cdot\boldsymbol{b})\\
&- (\boldsymbol{Sn}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{Sn}\cdot\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n})-(\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})+(\boldsymbol{Sa}\cdot\boldsymbol{Sb})\}] \quad\cdots\cdots (6)
\end{aligned}
$$

となる．

3. 証明および解析例　本研究では，Rudniki and Rice 型で表現すると

$$
\boldsymbol{P}=P_1\bar{\boldsymbol{S}}+P_0\boldsymbol{I}\quad P_1=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{3}\beta^2}\sqrt{2\bar{J}_2}}\quad P_0=\frac{\sqrt{2}\beta}{3\sqrt{1+\frac{2}{3}\beta^2}} \quad\cdots\cdots (7)
$$

$$
\boldsymbol{Q}=Q_1\bar{\boldsymbol{S}}+Q_0\boldsymbol{I}\quad Q_1=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{3}\mu^2}\sqrt{2\bar{J}_2}}\quad Q_0=\frac{\sqrt{2}\mu}{3\sqrt{1+\frac{2}{3}\mu^2}} \quad\cdots\cdots (8)
$$

の場合に限定して考察した．但し，β，μは，定数ではなく一般に$\bar{I}$，$\bar{J}_2$，$\bar{J}_3$の関数の場合も含んでいる．また，上付の"－"は，Gで無次元化した量を表す．$S_1>S_2>S_3$，また，$S_1-S_3<2G$を仮定し，式(7)，(8)を式(6)の無次元化した$\bar{H}$を($\bar{S}$，$\bar{\tau}$)の定義域，すなわち，３つのモール円で囲まれた閉鎖域で最大値をとる場合を厳密に分類し，限界硬化係数，およびせん断帯の方向の表現を求めた．ここでは紙面の都合上，証明は省略するが，結果の一部を記すと，

$$
-2\eta+\sqrt{\bar{J}_2}(2\varphi\beta-N)<0 \quad\cdots\cdots (9)
$$

$$
2\eta+\sqrt{\bar{J}_2}(2\varphi\mu-N)>0 \quad\cdots\cdots (10)
$$

$$
\begin{aligned}
&(1-2\nu)\frac{N}{2}-\sqrt{1-\frac{3}{4}N^2}<\frac{1+\nu}{3}\{(1+\sqrt{\bar{J}_2}\sqrt{1-\frac{3}{4}N^2})\mu+(1-\sqrt{\bar{J}_2}\sqrt{1-\frac{3}{4}N^2})\beta\}\quad\text{かつ}\\
&\quad\frac{1+\nu}{3}\{(1-\sqrt{\bar{J}_2}\sqrt{1-\frac{3}{4}N^2})\mu+(1+\sqrt{\bar{J}_2}\sqrt{1-\frac{3}{4}N^2})\beta\}<(1-2\nu)\frac{N}{2}+\sqrt{1-\frac{3}{4}N^2} \quad\cdots\cdots (11)
\end{aligned}
$$

式(9)，(10)，(11)が成立する時は，

$$
\frac{h_{cr}}{G}=-1-\varphi\beta\mu+\frac{1}{2(\eta+1)\bar{J}_2}[\bar{J}_2\{2-\varphi(\beta+\mu)N-N^2+2\varphi^2\beta\mu\}+4\eta-2\varphi\sqrt{\bar{J}_2}(\beta-\mu)-\sqrt{D_2}]
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
D_2 &= \{4-\bar{J}_2(4-3N^2)\}\{2\eta-\sqrt{\bar{J}_2}(2\varphi\beta-N)\}\{2\eta+\sqrt{\bar{J}_2}(2\varphi\mu-N)\}\\
\eta &= \varphi+\frac{1}{3}=1+\frac{\lambda}{G},\quad N=\frac{S_2}{\sqrt{J_2}}
\end{aligned}
$$

である．

4. 結論　有限変形する Rudniki and Rice 型の弾塑性体において，各分類における限界硬化係数とせん断帯の方向の理論的表現を得た．また，重要な結果として硬化係数の最大値は如何なる場合でも最大，最小偏差応力で決まるモール円上にあることがわかった．言い換えると，せん断帯に直交するベクトルは，中間主応力方向と垂直である．

参考文献

1) J.W.Rudnicki and J.R.Rice, *Mech. Phys. Solids*, Vol.23,pp.371-394(1975)
2) A.Benallal, *Arch, Mech.*,Vol.44,pp.15-29(1992)
3) G.Perrin and J.B.Leblond, *ASME*,Vol.60,pp.842-846(1993)