CS－2　構造・材料の強度変動の統計理論

大林組　正会員　○八尾浩樹
東北大学　正会員　池田清宏
京都大学　正会員　室田一雄
東北大学　正会員　柳澤栄司

1. はじめに

初期不整は構造及び材料系の強度の本質的な不確定要因である．構造特性や材料特性を定めるパラメータの初期不整は確率変数であり，結果として得られる強度も必然的に確率変数となる．材料及び構造系は無限に多くのパラメータを持つために，個々のパラメータの初期不整の影響を調べて行くという方法論では，多大な労力を要することになる．本研究は，種々の初期不整が正規分布に従う場合の強度発現の仕組の理論[1]を提案するものである．著者等は，十分値が小さい初期不整による耐荷力の低下量に関する漸近理論[2),3)]を提案している（この理論は Koiter[4] の理論の一般化にあたる）．この理論を拡張することにより，種々の初期不整が正規分布に従う場合の最大荷重（強度）の確率密度関数が陽な形で求まる．初期不整による最大荷重の低下量の確率変動を論理的かつ簡潔に記述できたことが，本研究の最大の成果である．適用例として，弾性床上のはり，シェルと砂の三軸圧縮試験体の強度変動を取り扱い，本理論の妥当性を示す．

2. 理論

載荷 fを受ける構造物の釣合い方程式を

$$\boldsymbol{H}(f,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$$

とする．ここで，f は載荷パラメタ，$\boldsymbol{u}$ は変位ベクトル，$\boldsymbol{v}$ は初期不整ベクトル，$\boldsymbol{H}$ は十分滑らかな非線形関数とする．

完全系を $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^0$とし，初期不整の大きさ$\varepsilon$ とモード（パターン）$\boldsymbol{d}$ を区別して $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^0+\varepsilon\boldsymbol{d}$ と表わす（上付き添字０は完全系の値を表す）．初期不整ベクトル $\boldsymbol{d}=(d_1,d_2,\cdots)^{\mathrm{T}}$は平均 $\boldsymbol{0}$，分散共分散行列 W^{-1} の正規分布 $N(\boldsymbol{0},W^{-1})$ に従うと仮定する．

初期不整 ε が小さいとき，耐荷力の変化量は

$$\lambda_{\mathrm{c}}-\lambda_{\mathrm{c}}^0 \sim -C_0\,[a(\boldsymbol{d})]^{\rho}\,\varepsilon^{\rho} \tag{1}$$

と表される[2),3)]．ここに，C_0 は正の定数，$a(\boldsymbol{d})$ は不整モード $\boldsymbol{d}$ に依存する変数である（下付き添字 c は特異点での値を表す）．ρ は完全系の特異点 $(\lambda_{\mathrm{c}}^0,\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}^0)$ のタイプによって

$$\rho=\begin{cases}1 & \text{極大点}\\ 1/2 & \text{単純非対称分岐点}\\ 2/3 & \text{単純対称分岐点，２重分岐点}\end{cases}$$

と定まる（２重分岐点としては，D_n-対称系の指数５以上の群論的２重不安定分岐点[5]を考える）．

初期不整ベクトル $\boldsymbol{d}=(d_1,d_2,\cdots)^{\mathrm{T}}$が正規分布 $N(\boldsymbol{0},W^{-1})$ に従うとき，単純特異点では，式(1)の耐荷力の低下量を支配する変数 a は正規分布に従がい，２重分岐点では a^2が自由度２のχ^2分布に従う．正規化した耐荷力の低下量

$$\zeta=\frac{\lambda_{\mathrm{c}}-\lambda_{\mathrm{c}}^0}{C_0\sigma^{\rho}} \tag{2}$$

（σは分散を表すスカラ）を定義すると，ζの確率密度関数は，a または a^2の確率密度関数を変数変換することにより，

$$f_\zeta(\zeta)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\zeta^2}{2}\right) & \text{極大点}\\ \frac{4|\zeta|}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\zeta^4}{2}\right) & \text{単純非対称分岐点}\\ \frac{3|\zeta|^{1/2}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-|\zeta|^3}{2}\right) & \text{単純対称分岐点}\\ \frac{3\zeta^2}{2}\exp\left(\frac{-|\zeta|^3}{2}\right) & \text{２重分岐点}\end{cases} \tag{3}$$

と陽な形で求まる．また信頼関数も

$$R_\zeta(\zeta)=\begin{cases}1-\Phi(\zeta) & \text{極大点}\\ 1-2\Phi(-\zeta^2) & \text{単純非対称分岐点}\\ 1-2\Phi(-|\zeta|^{3/2}) & \text{単純対称分岐点}\\ 1-\exp\left(\frac{-|\zeta|^3}{2}\right) & \text{2 重分岐点}\end{cases}$$

と求まる．ここにΦは誤差関数を表す．式 (2) の λ_c^0 と $C_0\sigma^\rho$ は実験または数値解析を繰り返し行う事により得た耐荷力の標本平均 $E_{\rm sample}[\lambda_c^0]$ と標本分散 $\mathrm{Var}_{\rm sample}[\lambda_c^0]$ をもとに簡単に求まる[1]．

3．適用例

単純対称分岐点により座屈荷重を支配される弾性床上のはりに，正規分布に従う初期不整を発生させた数値シミュレーション（１０００回）により求めた座屈荷重のヒストグラムと式 (3) より理論的に求めた確率密度関数とを図１に比較する（詳細は文献６を参照）．同じく単純対称分岐点により座屈荷重を支配される円筒シェルに，実測データにもとづく初期不整を発生させた数値シミュレーション[7]（１００回）の結果を図２に示す．両図ともにヒストグラムと単純対称分岐点の確率密度関数（点線）はよく一致しており，本理論の妥当性を示している．

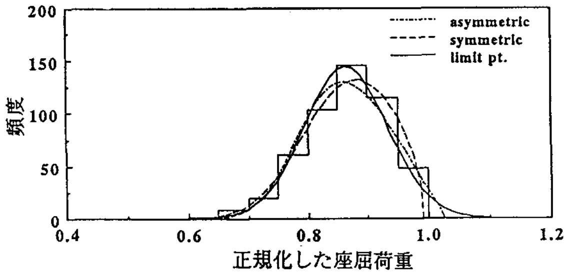

図１ 弾性床上のはりの座屈荷重の確率密度

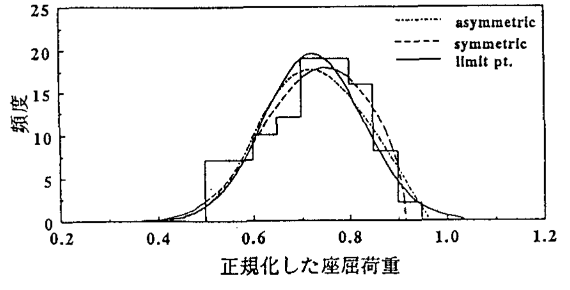

図２ 円筒シェルの座屈荷重の確率密度

２重不安定分岐点[5]により最大荷重（応力）が支配される例として砂の三軸試験を取上げる．同一の条件で３２回試験[8]を行った結果得た圧縮強度のヒストグラムと２重分岐点の確率密度関数とを図３に比較する．両者は比較的よく一致しており，本理論の妥当性を示している．

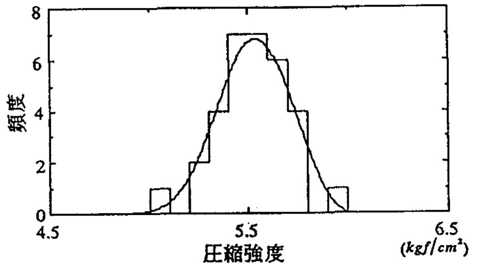

図３ 砂の三軸試験体の圧縮強度の確率密度

4．まとめ

本研究により強度変動の確率論的記述法の有効性の一端を示すことができた．種々の材料に対する適用が今後の課題である．

参考文献

[1] K. Ikeda, and K. Murota (1993): " Statistics of normally distributed initial imperfections," Int. J. Solids Structures, 30(18), 2445-2467.
[2] K. Ikeda, and K. Murota (1990): "Critical initial imperfection of structures," Int. J. Solids Structures, 26(8), 865-886.
[3] K. Murota, and K. Ikeda (1991): "Critical imperfection of symmetric structures," SIAM J. Appl. Math., 51(5), 1222-1254.
[4] Koiter, W.T. (1945): "On the Stability of Elastic Equilibrium," Diss. Delft, Holland.
[5] K. Ikeda, K. Murota, and H. Fujii (1991): "Bifurcation hierarchy of symmetric structures," Int. J. Solids Structures, 27(12), 1551-1573.
[6] I. Elishakoff (1979): "Buckling of a stochatically imperfect column on a nonlinear elastic foundation," J. Applied Mech., 46(2), 411-416.
[7] I. Elishakoff and J. Arbocz (1979): "Reliability of axially compressed cylindrical shells with random axisymmetric imperfections," Int. J. Solids Structures, 18(7), 563-585.
[8] K. Ikeda et al. (1994): "Imperfection sensitivity causing strength variation of soil specimens," Preprint.