CS－1　　塑性スピンの定式化についての一考察

足利工業大学　正　黒田充紀

１．はじめに

現象学的アプローチによる塑性変形速度 $\mathbf{D}^p$ に対する様々な数式表現が提案されてきた．最も代表的なものが周知の流れ理論である．このテンソル $\mathbf{D}^p$ は塑性に関する速度勾配テンソル $\mathbf{L}^p$ の対称部分という解釈になる．ところが，その反対称部分を $\mathbf{W}^p$ と記すと，$\mathbf{W}^p$ は従来の現象学的な理論の中では通常は定式化されず，その役割も不明であった．これは不合理であるとして，Dafalias (1985) は $\mathbf{W}^p$ を Plastic spin（塑性スピン）と称して，応力や背応力などを変数とする反対称テンソル値等方関数として表示定理を用いて展開する定式化を示した．表示定理を直接的に用いていることからも，現象学的というよりはむしろ数学的仮定に基礎を置いているといえる．この方法は，一般的な流れ理論のように現れる変数の個数が少ない場合には定めるべき係数の数も限定されて実際に適用することが可能と思われる．しかし，現れる変数の個数が多い場合には定めるべき係数の数が著しく増加して，それらの係数をすべて定めること自体不可能になってしまう．本検討では，この困難を解決する可能性のあるひとつの定式化の方法を考察する．

２．応力と塑性変形速度との非共軸性

Dafalias (1985) が最初に行った定式化は次の通りである．移動硬化を含むJ2流れ理論を考える場合，$\mathbf{D}^p$ は周知のとおり次のようである．

$$\mathbf{D}^p = <\lambda> \mathbf{N}^p = \left\langle \frac{1}{H}\mathbf{N}^p : \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \right\rangle \mathbf{N}^p, \qquad \mathbf{N}^p = \frac{3(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\alpha}')}{2\kappa} \tag{1}$$

ここに，$<\ >$ はMacauleyの括弧，H は硬化係数，$\boldsymbol{\sigma}$ は応力，$\boldsymbol{\alpha}$ は背応力，$'$ は偏差成分，$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}$ はスピン $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{W} - \mathbf{W}^p$ によって定義される $\boldsymbol{\sigma}$ の客観速度（$\mathbf{W}$ は速度勾配の反対称成分），κ は降伏局面の半径である．$\boldsymbol{\omega}$ は物質の下部構造のスピンを表すとされる．式(1)において応力などの２次以上の高次項は現れないことに対応して，塑性スピンも表示定理における第１項のみを考慮して次のように展開される．

$$\mathbf{W}^p = <\lambda>\eta(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\alpha}) = <\lambda>\eta[\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\alpha}') - (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\alpha}')\boldsymbol{\alpha}] = (\rho/2)(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{D}^p - \mathbf{D}^p\boldsymbol{\alpha}) \tag{2}$$

ここに，一般に η は $\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{\alpha}$ の不変量のスカラ関数であるが，$\eta = 3\rho/(4\kappa)$ とおいている（ρ は材料定数）．Dafaliasの提案以来，式 (2) の最後の表現が塑性スピンの最も単純かつ代表的な表現式として認められるようになった．明らかなように，これは塑性スピンが背応力（あるいはその他の内部変数）と $\mathbf{D}^p$ との非共軸性を表すことを主張するものである．

ここでは，もう一つのアプローチを考える．等方硬化則を仮定するJ2流れ理論においては，$\mathbf{D}^p$ の発生する方向は $\boldsymbol{\sigma}'$ の方向に限定され，$\boldsymbol{\sigma}$ と $\mathbf{D}^p$ は常に共軸となる．このような場合，塑性スピンは存在しない（$\mathbf{W}^p = \mathbf{0}$）と考えることが合理的であることは一般に認められている．一方，移動硬化則を適用すると背応力 $\boldsymbol{\alpha}$ の存在によって，$\boldsymbol{\sigma}$ と $\mathbf{D}^p$ の共軸性が失われる．すると，塑性スピンを考慮しないと，ねじり試験における軸方向効果（いわゆる Swift effect）がうまく説明できなくなるなどの不都合が生じる．このような現象学的考察から，少なくとも「塑性スピンは $\boldsymbol{\sigma}$ と $\mathbf{D}^p$ の関数である」と仮定をすることができる．そしてさらにスピンという性格上，反対称テンソル $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{D}^p - \mathbf{D}^p\boldsymbol{\sigma}$ が重要な役割を果たすと予測できる．ごく最近，Zbib (1992) は，これに関連する興味深い成果を得ている．すなわち，微視的なレベルの結晶塑性モデルに基づいて現象学的塑性モデルを導出するというアプローチの中で，塑性スピンは $\boldsymbol{\sigma}$ と $\mathbf{D}^p$ の非共軸性によって表現可能なことを示している．

ところで，改めて式 (2) の変形を見ると，実は次のようにも変形できることが容易にわかる．

$$\mathbf{W}^p = <\lambda>\eta(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\alpha}) = <\lambda>\eta[(\boldsymbol{\alpha}' - \boldsymbol{\sigma}')\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}' - \boldsymbol{\sigma}')] = (\rho/2)(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{D}^p - \mathbf{D}^p\boldsymbol{\sigma}) \tag{3}$$

最後の表現はまさに塑性スピンが $\boldsymbol{\sigma}$ と $\mathbf{D}^p$ の非共軸性に由来するものであることを主張している．ただし，この流れ理論の場合は，式 (2) と (3) は本来同一なものを異なった表現で表しているにすぎず，これのみから

は，塑性スピンが $\boldsymbol{\sigma}$ と $\mathbf{D}^p$ の非共軸性に由来するという概念に関する検討はできない．そこで，より多くの変数によって構成されるモデルを用いて検討する必要がある．以下では，降伏局面にとがり点を有するモデルを用いて検討する．

3．とがり点を考慮する構成式の場合

J2流れ理論では，構成式中のテンソル変数は $\boldsymbol{\sigma}$ と $\boldsymbol{\alpha}$ のみであるのに対し，とがり点の成長を考慮するコーナー理論の場合には $\mathbf{D}^p$ は $\boldsymbol{\sigma}$，$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}$，$\boldsymbol{\alpha}$ の3つのテンソルの関数になる．ここでは，Gotoh（1985）のコーナー理論（J2G）を用いて考察する．オリジナルのJ2Gは等方硬化を仮定していたが，ここで移動硬化を含む形に拡張すると，次のように表現することができる．

$$\mathbf{D}^p = \langle\lambda\rangle\, \mathbf{N}^p(\boldsymbol{\sigma}, \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \mathbf{N}^p(\boldsymbol{\sigma}, \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\alpha}) = \phi_1 \boldsymbol{\sigma}' + \phi_2 \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}{}' + \phi_3 \boldsymbol{\alpha}'$$

ここに，λ は負荷インデックス，ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 は $\boldsymbol{\sigma}$，$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}$，$\boldsymbol{\alpha}$ の不変量および相当塑性ひずみ ε^p のスカラ関数．（具体形はGotoh(1985)に譲るが，$\phi_3 = -\phi_1$ である．）これによれば塑性スピンは次のように表現できる．

$$\mathbf{W}^p = \beta_1 (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{D}^p - \mathbf{D}^p\boldsymbol{\sigma}) = \beta_1 <\lambda> [\phi_2 (\boldsymbol{\sigma}\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} - \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}) + \phi_1 (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\alpha})] \tag{4}$$

簡単のために，$\beta_1 = q/\bar{\sigma}_e$ と仮定する．q は定数，$\bar{\sigma}_e = [(3/2)(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\alpha}') : (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\alpha}')]^{1/2}$ である．

図1は，単純せん断問題を数値解析した一例である．降伏局面の大きさが変化しない移動硬化則(Ziegler則)を仮定している．横軸はせん断ひずみ γ，縦軸は $\sqrt{3}\,\sigma_{12}/\sigma_{y0}$ である．材料特性は，E をヤング率，σ_{y0} を初期降伏応力として，$E/\sigma_{y0} = 500$，ポアソン比 $\nu = 1/3$，J2G理論に現れるとがり点の成長速さを決めるパラメータ $\rho = 0.2$．単軸引張の場合の硬化曲線を，$\sigma = d(\varepsilon_0 + \varepsilon^p)^n$ において $d/\sigma_{y0} = 1.473$，$\varepsilon_0 = 0.002$，n=0.0625，と仮定している．塑性スピンを考慮しない場合には，せん断応力の変化が不連続になっているが，これは計算上除荷が起こった結果である．これは，塑性スピンを考慮すること，すなわち，q の値を増加させるとことによって解消されている．図2は，γ の増加に対する，ω_{12}/W_{12} の変化を示したものである．q に正の値を与えることによって，ω_{12}/W_{12} は1から γ の増加にともなって減少し，0 に漸近している．これに不合理な点は見られない．

4．まとめ

現象学的な考察により，塑性スピンが応力と塑性変形速度の非共軸性に由来するという概念に基づく定式化について検討した．この方法をコーナー理論に応用したところ，許容できるスピンの挙動を得ることができた．示した数値例は非共軸性の概念の妥当性の一端を示すものと判断できる．

参考文献

Dafalias, Y.F. (1985), The plastic spin, ASME J. Appl. Mech., **52**, 865.
Zbib, H.M. (1991), On the mechanics of large inelastic deformations: noncoaxiality, axial effects in torsion and localization, Acta Mech., **87**, 179.
Gotoh, M. (1985), A class of plastic constitutive equations with vertex effect, Int. J. Solids Structures, **21**, 1101.

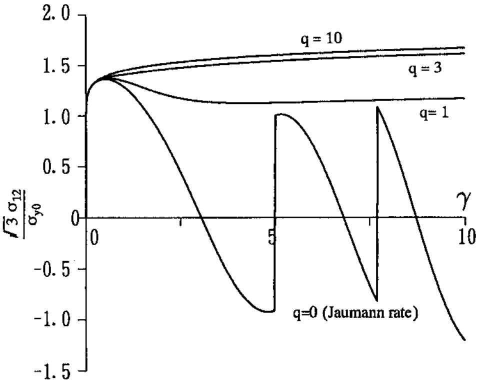

図1　単純せん断問題におけるσ_{11}–γ の関係

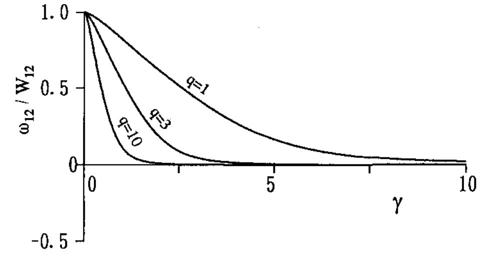

図2　図1に対応するスピンω_{12}の変化