VI-266　ベイズ方式による労働災害の発生時間数の推定について

労働省産業安全研究所　正員　花安繁郎

１．まえがき

筆者はこれまで，事業所での労働災害発生危険性評価法のひとつとして，労働災害が発生するまでの時間数を用いて，災害発生頻度率が時間の経過とともに変動する過程を評価する方法について考察を加えてきた。この災害発生時間数を分析する確率分布には指数分布を用いることが多い。

周知のように，指数分布のパラメータは単位時間当りの発生数（災害発生頻度率）を表し，かつその値は一定である。しかし，災害発生頻度率は一定値であるよりも，さまざまな要因の影響によって常に変動していると考えた方が合理的な場合が多い。

このような問題の解決法のひとつとして，災害発生頻度率がある確率分布（例えばガンマ分布）に従って変動すると仮定し，発生時間数分布との複合化によって新たな分布式を導出して分析を行う方法があり，その際これらの確率分布式のパラメータは，災害データを用いて推定がなされる。

ところが災害は頻繁に起こるわけではないので，大量の災害データを観察して信頼性の高い災害発生頻度率分布のパラメータを推定出来る場合は比較的限られており，実際にはその場で得られた数少ないデータを用いて推定せざるを得ないことが多い。

そこでここでは，少数のデータでも適用が可能なベイズの定理を用いて，災害に関する事前情報が与えられたときの災害発生率の確率分布式を求め，さらに同確率分布式を用いて災害発生時間数の確率密度関数を導出し，同式により災害発生時間数の確率的な予測，評価を行うことを試みた。

２．ベイズ方式による災害発生率の推定

災害発生時間数の分布が指数分布のとき（災害発生数がポアソン分布に従うとき），ある期間TでX件の災害が発生したことが事前の情報として得られたとき，災害発生率λの分布（事後分布）はベイズの定理によって次のガンマ分布として求められる。

$$h(\lambda)=\frac{(\lambda T)^{x}}{X!}\,T\cdot\exp\{-\lambda T\} \tag{1}$$

３．ベイズ方式による災害発生数の評価

事前情報が与えられたとき，災害発生率λの事後分布が得られたので，災害発生時間数の分布を求めるには指数分布を同式で複合化すればよい。

$$f(t)=\int_0^\infty \lambda\cdot\exp\{-\lambda t\}\cdot\frac{(\lambda T)^{x}T}{X!}\cdot\exp\{-\lambda T\}\,d\lambda$$

$$=\frac{T^{X+1}}{X!}\int_0^\infty \lambda^{x+1}\cdot\exp\{-\lambda(T+t)\}\,d\lambda$$

$$=\frac{(X+1)!}{X!}\cdot\frac{T^{x+1}}{(T+t)^{x+2}}=\frac{(X+1)}{T}\left(\frac{T}{T+t}\right)^{x+2} \tag{2}$$

上式はパレート分布と呼ばれる確率分布である。また上式で$\lambda=X/T$を一定に保ったままで観測期間を$T\to\infty$（従って$X\to\infty$）としたとき，次式の指数分布がその極限分布として得られる。

$$f(t)=(X/T)\cdot\exp\{-Xt/T\} \tag{3}$$

次に，複数件の災害が発生するまでの時間数分布をベイズ方式により求めてみる。個々の災害発生時間分布が指数分布のとき，複数件の災害時間分布はガンマ分布となり，災害発生率の事後分布との複合化を経て次の複合化ガンマ分布が得られる。

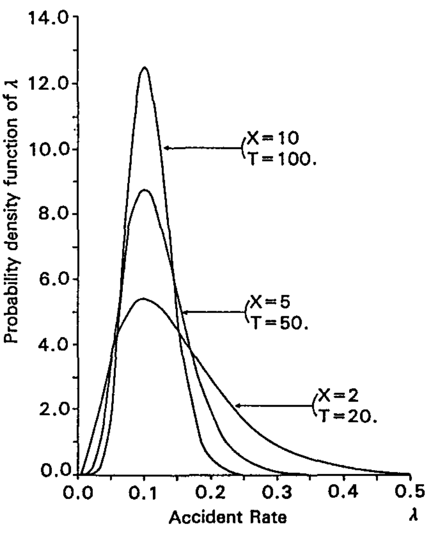

図-1　ベイズ方式による災害発生率の確率分布

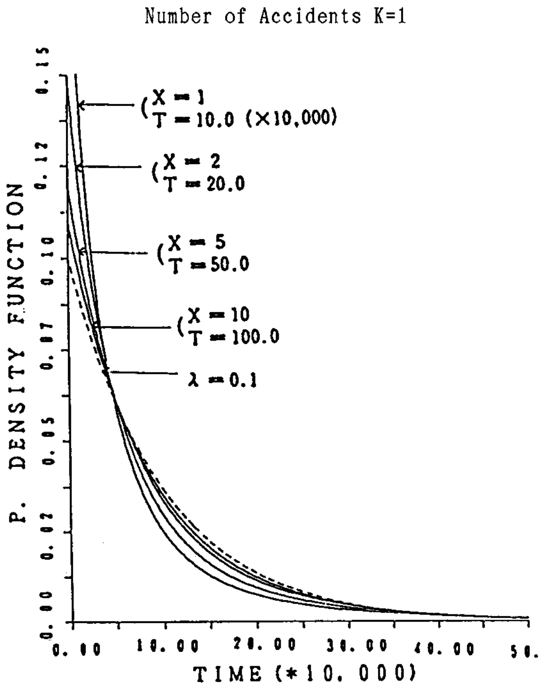

図-2　ベイズ方式による災害発生時間分布(K=1)

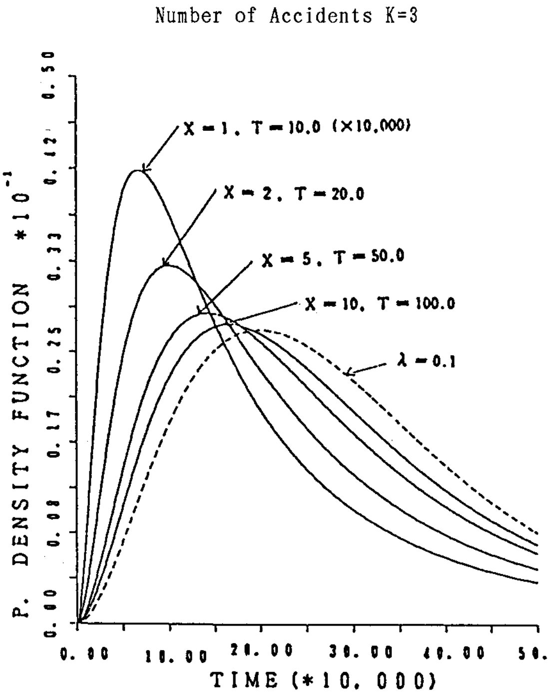

図-3　ベイズ方式による災害発生時間分布(K=3)

$$f_K(t_K)=\binom{X+K}{K}\frac{K}{t_K}\left(\frac{T}{T+t_K}\right)^{X+1}\left(\frac{t_K}{T+t_K}\right)^{K} \qquad (4)$$

また，上式で$\lambda=X/T$を一定に保ち，観測期間を$T\to\infty$にした極限の分布は，パレート分布と同様な手続きを経て次のガンマ分布式となる。

$$f_K(t)=\frac{(X/T\cdot t)^{K-1}}{(K-1)!}\cdot\frac{X}{T}\cdot\exp\{-\frac{X}{T}t\} \qquad (5)$$

ベイズ定理による災害発生率の分布を分析した事例として，平均災害率を$\lambda=X/T=0.1$に一定に保ち，(X,T)=(10,100),(5,50),(2,20) の3つの異なったケースについて災害発生率の事後分布を求めた結果を図-1に示した。同図から，同じ平均災害発生頻度率でも，観測期間が長いほどλの変動が小さくなることがわかる。これは観測期間 Tが長いほどλの分布の分散が小さくなるためである。

また，パレート分布，複合化ガンマ分布を計算した事例として，ここでは災害件数 K=1,3の場合について，平均災害発生率を$\lambda=X/T=0.1$として(X,T)のいくつかのケースについてその発生時間数の確率密度関数を求めた結果を図-2,3に示した。

事業所等において，期間T=10までに X=1の災害が起こったとすると，その情報のもとでの災害発生時間数の分布は，同図の(X,T)=(1,10)の分布曲線で示される。また，同じ事業所で引き続いて次のT=10期間で災害も同じくX=1 件の災害を得たとすると，当初からの災害情報を合計すると，T=20においてX=2を得たことになる。この情報のもとでの災害発生時間数の分布は(X,T)=(2,20)の分布曲線で表される。以下同様にして，観測期間 Tが延びて災害情報も増すに従って，増加した災害情報を用いて災害発生率の新たな事後分布を推定し，この新しい事後分布のもとでの災害発生時間数の分布を更新するという手続きを繰回して評価を行うことが出来る。

４．むすび

ベイズ方式では，少数のデータであっても災害発生率を推定することが出来，また観測期間が長くなり災害情報が多く得られるに従って推定される災害発生率の分布の分散が小さくなり，推定値の確信度が高まる特性を有している。

少数のデータに起因する推定値の信頼性の欠如を克服する手法として，今後ベイズ方式が労働安全性評価の分野で果す役割は大きいと考えられる。