V-245　Fickの一次元拡散方程式の係数の同定

東電設計(株)　耐震技術部　正会員　松島　学
東京電力(株)　技術研究所　正会員　堤　知明
東京電機大学　建設工学科　正会員　松井邦人
早稲田大学　土木工学科　正会員　関　博

1. はじめに

海水中には、塩化物イオンをはじめ数多くのイオンが存在しているが[1]、コンクリート中に深く浸透するのは塩化物イオンのみと言われている。塩害による鉄筋コンクリート部材の劣化は、塩化物の浸透による鉄筋の不動態被膜の破壊が発端と考えられる。コンクリート表面から浸透しコンクリート中に浸透蓄積する塩化物は、固体空隙溶液中のイオンの拡散、乾湿による移動、細孔中の毛管現象、塩化物イオンの一部のセメント水和物との反応による固定化、コンクリートの炭酸化による塩化物イオンの移動など総合した要因により生じる[2),3)]。現在、この種の現象をすべて理論的に、解析的に表現するに至っておらず、そのため実用的には、マクロ的に従来からFickの一次元拡散方程式[4)]で表せるものと仮定されている。

本研究は、実際の測定された塩化物量の深さ方向の値から、この式の係数値を同定する手法を提案するものである。

2. 拡散方程式と同定手法

Fickの一次元拡散方程式は式(1)の微分方程式で表される。

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_c \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} \tag{1}$$

この一次元拡散方程式の解は、式(2)で求められる。

$$C(X_t,t) = C_0\left(1.0-\mathrm{erf}\left(\frac{X_t}{2\sqrt{D_c \cdot t}}\right)\right) \tag{2}$$

ここで、D_c, C_0, X_t, tは拡散係数，表面塩化物量，コンクリート表面からの位置および経過時間である。erf(・)は誤差関数である。

本研究では、経過時間tは既知であるとし、測定された深さ方向の塩化物量のセット$\{X_t, C\}$の値より拡散方程式のパラメータD_c, C_0を同定しようとするものである。モデルの深さ方向での塩化物量の観測点X_{tj}（j:観測値の番号）における測定値を$v_j(X_{tj})$、解析値を$u_j(X_{tj})$、測定誤差を$\varepsilon_j(X_{tj})$とし、解析値と真値が一致すると仮定とすると、式(3)の関係が成立する。

$$v_j = u_j + \varepsilon_j \tag{3}$$

拡散方程式の未知パラメータを$\{D_c, C_0\}$とすると、$X=\{D_c, C_0\}^T$でありuは$\{D_c, C_0\}$の関数である。Gauss-Newton法に基づき、評価関数Jを式(4)のように定義する。

$$J = \frac{1}{2}\int_{x_t}\left(v - u - \frac{\partial u}{\partial D_c}\cdot\delta D_c - \frac{\partial u}{\partial C_0}\cdot\delta C_0\right)^2 dx_t \tag{4}$$

次に、式(4)を最小にするように同定パラメータ$X=\{X_1, X_2\}^T=\{D_c, C_0\}^T$を決定する。そのための必要条件$\partial J/\partial\delta X_i=0$ (i=1〜2) より式(5)のように求められる。

$$A\cdot\Delta X = B \tag{5}$$

ここで、

$$\Delta X = \{\delta D_c, \delta C_0\}^T$$

$$A = \begin{bmatrix} \int_{x_t}\left(\frac{\partial u}{\partial D_c}\right)^2 dx_t & \int_{x_t}\frac{\partial u}{\partial D_c}\cdot\frac{\partial u}{\partial C_0}dx_t \\ \int_{x_t}\frac{\partial u}{\partial D_c}\cdot\frac{\partial u}{\partial C_0}dx_t & \int_{x_t}\left(\frac{\partial u}{\partial C_0}\right)^2 dx_t \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \int_{x_t}(u-v)\frac{\partial u}{\partial D_c}dx_t \\ \int_{x_t}(u-v)\frac{\partial u}{\partial C_0}dx_t \end{bmatrix}$$

式(5)はδX_iに関する連立方程式である。uの同定パラメータに関する偏微分係数は動的感度であり、式(2)をX_iで偏微分し、数値積分により求められる。式(4)をδX_iについて解き、$X_i=X_i+\delta X_i$として繰り

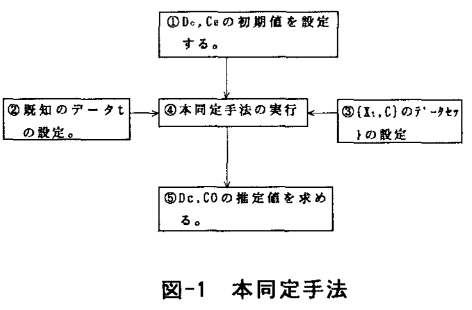

図-1　本同定手法

返し計算を行うことにより、X_iの最適推定値を求めることになる。

図-1に本同定手法のフローを示す。図にみられるように、①で求める係数D_c,C_0の初期値を設定する。②既知の項目、係数tを設定する。③測定された深さ方向の塩化物量のセット｛X_t,C｝の値を設定する。④では、①,②,③により本同定手法を用いて⑤でD_c,C_0の最適値を推定する。

3. 計算例

次に、2.で説明した手法を用いた計算例を示す。計算にあたり問題となるのは初期値である。本手法では、C_0の初期値は測定された最も浅い位置での塩化物量と仮定した。また、D_cについては、初期値を一般的な拡散係数の取りうる10^{-8}〜10^{-9}cm^2/secの範囲の10個のデータを用意し、この初期値で得られた推定値の内、誤差が最小のものを最適推定値として選択した。なお、式(2)の拡散方程式の解には、参考文献(5)の近似解法を利用した。

計算に利用された観測データを表-1に示す。得られた観測データ数は全5個である。

表-1 観測データ

No.	深さX_t(cm)	塩化物量C(kg/m^3)
1	1.0	6.40
2	3.0	6.30
3	5.0	3.57
4	7.0	1.79
5	9.0	0.60

図-2に収束結果と実測値の関係を示す。同図に見られるように本システムの近似解法は良好な計算結果を示している。初期値の違いによる収束状況を図-3.aに表面塩化物量を、図-3.bに拡散係数についての収束過程の結果を示す。どの初期値を設定しても収束値は同じ値を取り、始めに初期値により収束値が局所的な最小値に落ちつき、真の最小値に収束しない場合があることの危惧は心配する必要がなかった。また、収束までの計算回数は3〜4回程度で安定している。

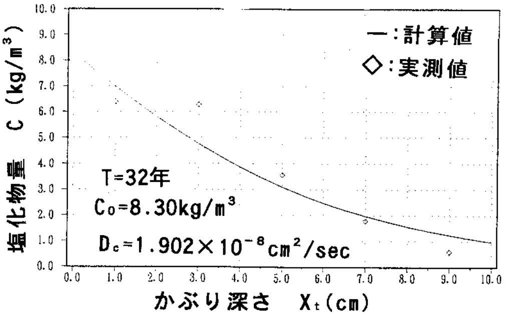

図-2 収束した推定値と実測値の比較

計算時間は、数値演算プロセッサー付きのNEC-PC9801DAで、F77L(FORTRAN)のコンパイラーを利用して、3.0sec程度で計算できる。

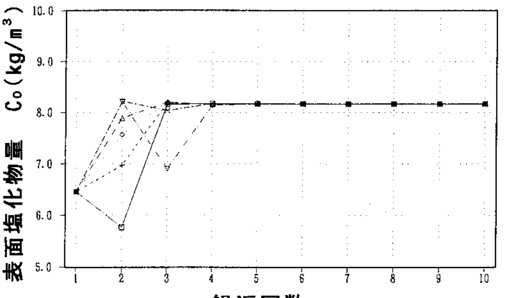

図-3.a 収束過程（表面塩化物量C_0）

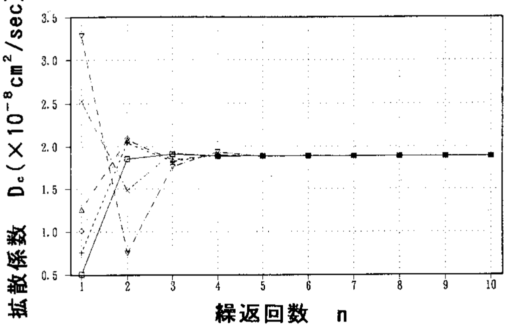

図-3.b 収束過程（拡散係数D_c）

（参考文献）

1)森好生,野木孝次:コンクリートの耐海水性に関する研究-材令10年試験結果報告-,セメントコンクリート.NO.417,1981.

2)小林一輔,白木亮司,河合研司:炭酸化によって引き起こされるコンクリート中の塩化物,硫黄塩化物及びアルカリ化合物の移動と濃縮,コンクリート工学論文集,第1巻第2号,1990.7.

3)小林一輔,宇野祐一:コンクリートの炭酸化のメカニズム,コンクリート工学論文集,第1巻第2号,1990.7.

4)John Crank:The Mathematics of Diffusion,1956,Oxford Univ. Press.

5)永野広雄:塩分汚染コンクリート構造物の診断手法の提案,大成建設技術研究所報,第18号,pp.69〜73.