Ⅳ-379　予算制約をもつ離散型交通ネットワーク計画問題の解法

金沢工業大学　正員　片山直登

1.　はじめに

予算制約をもつ交通ネットワーク計画問題は，予算内で利用者均衡を考慮した交通の総走行費用（時間）を最小にする改善リンクを選定する問題である．離散型交通ネットワーク計画問題は，リンクの容量の連続的な改善案を求めるのではなく，リンクの改善をする・しないという離散的な解を求める問題である．

連続型計画問題は比較的多くの研究がなされているが，離散型計画問題の研究としては，LeBlanc [1]が予算制約と利用者均衡の目的関数を緩和した緩和問題とその解法，Poorahedy[2]が優越解集合に対する近似解法を提案している．本研究では，予算制約をラグランジュ緩和し，利用者均衡の目的関数を緩和した緩和問題と下界値の解法および近似解法を提案する．

2.　問題の定式化と緩和問題

ノード集合をN，リンク集合をL．リンク(i,j)上を走行するリンク交通量をx_{ij}とし，リンク(i,j)の改善の有無を表す0-1変数をy_{ij}とする．リンク(i,j)の走行費用関数を$f_{ij}(x_{ij},y_{ij})$，リンク(i,j)の建設費用をa_{ij}，予算をb，利用者均衡条件を$USER$とする．予算制約をもつ離散型交通ネットワーク計画問題Pは次のように定式化できる．

$$\min \sum_{(i,j)\in L} f_{ij}(x_{ij},y_{ij})\cdot x_{ij} \tag{1}$$

s.t.

$$\sum_{(i,j)\in L} a_{ij}\cdot y_{ij} \le b \tag{2}$$

$$y_{ij}\in\{0,1\},\quad (i,j)\in L \tag{3}$$

$$x \in USER \tag{4}$$

この問題は2レベルの非線形混合整数計画問題となるため，(2)式を非負のλを用いてラグランジュ緩和，yの0-1条件を連続緩和し，さらに(4)式中の利用者均衡問題の目的関数を緩和した問題Rを考える．

$$\min \sum_{(i,j)\in L} \{F_{ij}(x_{ij},y_{ij})\cdot x_{ij} + a_{ij}\cdot\lambda\cdot y_{ij}\} - b\lambda \tag{5}$$

s.t.

$$0 \le y_{ij} \le 1,\quad (i,j)\in L \tag{6}$$

$$\sum_{j\in N} x^m_{jn} - \sum_{i\in N} x^m_{ni} = d^m_n,\ m\in M, n\in N \tag{7}$$

$$x_{ij} = \sum_{m\in M} x^m_{ij},\quad (i,j)\in L \tag{8}$$

$$x_{ij}\ge 0,\quad (i,j)\in L \tag{9}$$

ここで，ODペアの集合をM，ODペアmのリンク(i,j)上の交通量をx^m_{ij}，ノードnがODペアmの始点であれば-OD交通量，終点であればOD交通量，それ以外の場合は0である定数をd^m_nとする．また，

$$F_{ij}(x_{ij},y_{ij}) = f^0_{ij}(x_{ij}) - y_{ij}\cdot f^1_{ij}(x_{ij}) \tag{10}$$

とし，$f^0_{ij}(x_{ij})$を$y_{ij}=0$のときの走行時間関数，$f^1_{ij}(x_{ij})$を$y_{ij}=1$のときの走行時間の減少量とする．

利用者均衡問題の目的関数を緩和，すなわちシステム最適化とした問題は問題Pの緩和問題となるため，問題Rは問題Pの緩和問題となり，問題Rの最適目的関数値は問題Pの下界値となる．

3.　緩和問題Rの解法

非負のラグランジュ乗数λが与えられた場合，問題Rは凸非線形計画問題となり，xについてはFlank-Wolfe法などによって解くことができる．ここで，実行可能な任意の$\bar{\lambda}$，$\bar{x}$が与えられた場合に，y_{ij}に関しては次の単純な線形計画問題$S(y_{ij})$となる．

$$\min\ \{a_{ij}\bar{\lambda} - f^1_{ij}(\bar{x}_{ij})\cdot\bar{x}_{ij}\}\cdot y_{ij} \tag{11}$$

s.t.

$$0\le y_{ij}\le 1 \tag{12}$$

したがって，この問題の最適解は容易に求めることができ，得られる解は常に0-1となる．実行可能な任意の$\bar{x}$が与えられた場合に，y，λに関しては次の問題$T(y,\lambda)$になる．

$$\max_{\lambda\ge 0}\min_{y} \sum_{(i,j)\in L} \{a_{ij}\lambda - f^1_{ij}(\bar{x}_{ij})\cdot\bar{x}_{ij}\}\cdot y_{ij} - b\lambda \tag{13}$$

s.t.

$$0 \leq y_{ij} \leq 1 \quad (i,j) \in L \tag{14}$$

したがって，$\bar{x}$が与えられたときに，λを2分探索法により設定することによって，容易に最適なyと適切なλを求めることができる．

・緩和問題の解法の手順

[1] x，y，λの初期値を設定する．

[2] Flank-Wolfe のイテレーションにより x を更新する．

[3] $T(y,\lambda)$ を解き，y，λを更新する．

[4] 解が収束すれば，終了．そうでなければ [2] へ．

4. 近似解法

Rは緩和問題であるため得られた解は実行可能解とは限らない．そこで，実行可能なyを求めることを考える．yに関する制約は (2)，(3) 式である．前節により，Rを解くことによって得られる解yは必ず (3) 式を満足する．ここで，次の問題 $A(y,\lambda)$ を考える．

$$\max_{\lambda \geq 0} \min_{y} \sum_{(i,j)\in L} \{a_{ij}\lambda - f^1_{ij}(\bar{x}_{ij}) \cdot \bar{x}_{ij}\} \cdot y_{ij} - b\lambda \tag{15}$$

s.t.

$$0 \leq y_{ij} \leq 1, \quad (i,j) \in L \tag{16}$$

$$\sum_{(i,j)\in L} a_{ij} \cdot y_{ij} \leq b \tag{17}$$

この問題も同様にλを設定すれば0-1ナップサック問題となり，実行可能なyとλを求めることができる．得られた解は (2) 式を満足するので，問題Pの実行可能解となる．実行可能なyが求められれば，ネットワーク上で利用者均衡問題を解くことによって，実行可能なxを求めることができる．

・近似解法の手順

[1] x の初期値を設定する．

[2] $A(y,\lambda)$ を解き，yとλを求める．

[3] 利用者均衡問題を解き，x を求める．

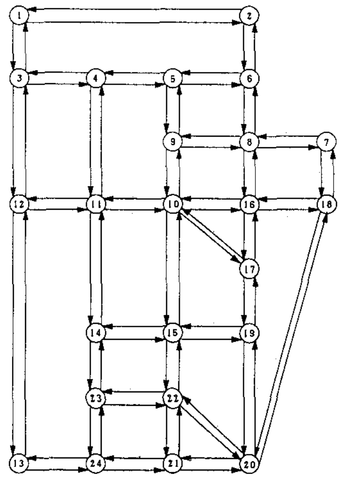

図 1 ネットワーク

表 1 解の比較

		モデル1	モデル2
本解法	上界値	8644	8528
	下界値	8298	8304
	誤差 (%)	4.00	2.60
	計算時間 (秒)	26.6	27.1
Le-Blanc法	下界値	7963	6900
	誤差 (%)	7.90	19.1
	計算時間 (秒)	26.0	26.0

5. 数値例

図1の24ノード，76リンク (拡張可能リンク 10,20)，552 OD ペアのサウスダコタ州の Sioux Falls 市のネットワークを用いて，IBM 系 (i486-66M) パソコン上の FORTRAM コンパイラを使用して，数値実験を行った．

ネットワークのデータは，LeBlanc のものを基本とし．モデル1は拡張可能リンク10の場合，モデル2は拡張可能リンク20とした．表1に計算結果を示す．

6. おわりに

本研究では，予算制約をもつ利用者均衡を考慮した離散型ネットワーク計画問題に対するラグランジュ緩和を用いた下界値の解法と近似解法を提案した．提案した解法によって LeBlanc の解法よりも良い解を得ることができた．

参考文献

1) LeBlanc : " An Algorithm for the Discrete Network Design Problem," *Transpn Sci.*, Vol.9, pp183–199, (1975).
2) Poorzahedy,H. and Turnquist,M.A. : " Approximate Algorithms for the Discrete Network Design Problem," *Transpn. Res. B*, Vol.16, pp45–56, (1982).