

IV-219

GPSによる測量網に対するフリーネット解の計算手法

神戸大学 正会員 櫻井春輔

神戸大学 学生会員 川嶋幾夫

神戸大学 学生会員 荒谷裕介

パプアニューギニア工科大学(元神戸大学) ニヤルバ・アナンガ

①. はじめに 測量網の調整計算においては、測点のいずれもが同程度の誤差を含んでいることから、すべての測点に誤差が適当に配分されるフリーネットワーク法が従来から用いられてきた。しかし、これまでのフリーネット調整計算ではムーア・ペンローズ型の一般化逆行列を用いて定式化しており、厳密にそれを求めることは困難であったため、近似式を用いて解くことが行われた。ここでは、近似式によらず定式そのまま解くことによってフリーネット解を求め得る新しい計算手法を提案する。この方法では、未知パラメータのノルムを最小にするという条件を用いて未知パラメータ間の関係を設け、この関係によって未知パラメータのうちのいくつかを消去し、未知パラメータベクトルのランクを下げ、唯一解が求まるように定式化する。このとき、どのパラメータを消去するかは観測網の構成に基づいて決定しなければならないが、GPS測量や水準測量で構成した測量網では、観測量はすべて座標値あるいは標高の差として表されるので、どのようなケースであっても、測点のうち1点にかかわる座標値あるいは標高を消去するように定式化すれば事足りる。したがってこの計算手法は、GPS測量あるいは水準測量により構成される測量網の調整計算に適している。

②. 新しい計算手法 GPSによる測量網における観測方程式をマトリックス表示すると次のようになる。

$$L = AX - v \quad (1)$$

(1) 式において、未知パラメータXのうち、消去しないものを X_1 、消去するものを X_2 として分けると、(1)式は次のように書くことができる。

$$L = A_1 X_1 + A_2 X_2 - v \quad (2)$$

ここで、 $v^T P v \rightarrow \min$ の条件を満足するように正規方程式をたてれば次のようになる。

$$(A_1^T P A_1) X_1 + (A_1^T P A_2) X_2 - (A_1^T P L) = 0 \quad (3)$$

$$(A_2^T P A_1) X_1 + (A_2^T P A_2) X_2 - (A_2^T P L) = 0 \quad (4)$$

このとき、ノルム $X^T X \rightarrow \min$ の条件を満足するように変換マトリックス $\bar{G}_1$ を定めれば、 X_2 の推定値 $\hat{X}_2$ を X_1 の推定値 $\hat{X}_1$ の関数として表すことができる。

$$\hat{X}_2 = \bar{G}_1^T \hat{X}_1 \quad (5)$$

ただし、 $\bar{G}_1 = (A_2^T P A_1)^{-1} (A_1^T P A_1)$

したがって、(1)式は次式のように書き換えることができる。

$$L = \bar{A} X_1 - v \quad (6)$$

ただし、 $\bar{A} = A_1 + A_2 \bar{G}_1^T$

このとき、 X_1 の推定値 $\hat{X}_1$ は唯一解として次式で求められる。

$$\hat{X}_1 = (\bar{A}^T P \bar{A})^{-1} \bar{A}^T P L \quad (7)$$

なお、 $\hat{X}_1$ が求められれば、(5)式により $\hat{X}_2$ は一意的に定められる。 X_1 と $\hat{X}_1$ についてまとめて書けば(8)式のようになる。

$$\hat{X} = \begin{Bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ \overline{G}^T \end{bmatrix} (\overline{A}^T P \overline{A})^{-1} \overline{A}^T P L \quad (8)$$

③. 検証 ここで提案する方法の適用性を確かめる。ある平坦な地（いずれの測点においても仰角 15° 以上の障害物なし）に測点を4つ設け、GPSの干涉測位法（Trimble社4000SST受信機、基線解析は付属ソフトTrimble-Plus、観測時間は60～90分以上）によってそれぞれの基線を独立に測量し、表-1のような相対座標を得た。この相対座標を用いて次の3つの方法により調整計算を行った。

1) 1つの測点を固定した最小二乗解

2) ムーア・ペンローズ型の一般化逆行列（近似解）を用いたフリーネット解

3) ここで提案する計算手法によるフリーネット解

表-1 基線解析によって求めた各基線の相対座標

基 線	dx	dy	dz
測点1-測点2	429.341	929.292	-511.393
測点1-測点3	-113.361	791.684	-926.550
測点1-測点4	-613.517	63.652	-697.976
測点2-測点3	-542.701	-137.598	-415.165
測点2-測点4	-1042.855	-865.647	-186.587
測点3-測点4	-500.151	-728.037	228.572

(単位: m)

表-2 調整計算によって求めた測点の座標値

(1) 1つの測点を固定した最小二乗解

測 点	座 標 値 (m)		
	X	Y	Z
測 点 1	0.000	0.000	0.000
測 点 2	429.340	929.292	-511.390
測 点 3	-113.362	791.688	-926.548
測 点 4	-613.515	63.649	-697.973
$X^T X = 3.68 \times 10^4 \text{ (m}^2\text{)}$			
$v^T P v = 0.000189 \text{ (m}^2\text{)}$			

(2) ムーア・ペンローズ型の一般化逆行列（近似解）を用いたフリーネット解

測 点	座 標 値 (m)		
	X	Y	Z
測 点 1	74.366	-446.046	533.844
測 点 2	503.598	483.014	22.582
測 点 3	-38.968	345.444	-392.472
測 点 4	-539.996	-382.412	-163.954
$X^T X = 1.72 \times 10^4 \text{ (m}^2\text{)}$			
$v^T P v = 0.434241 \text{ (m}^2\text{)}$			

(3) ここで提案する計算手法によるフリーネット解

測 点	座 標 値 (m)		
	X	Y	Z
測 点 1	74.384	-446.157	533.978
測 点 2	503.724	483.135	22.588
測 点 3	-38.978	345.531	-392.570
測 点 4	-539.131	-382.508	-163.995
$X^T X = 1.72 \times 10^4 \text{ (m}^2\text{)}$			
$v^T P v = 0.000189 \text{ (m}^2\text{)}$			

④. まとめ ここでは、新しい定式化によるフリーネット解の計算手法を提案し、実際にGPSによる測量網の調整計算に適用した。そして、本法による解を1つの測点を固定した最小二乗解およびムーア・ペンローズ型の一般化逆行列（近似解）を用いたフリーネット解と比較した。その結果次のことが分かった。

- 1) ここで提案した定式化によるフリーネット解の計算手法では、誤差最小 ($v^T P v \rightarrow \min$) および、未知パラメータのノルム最小 ($X^T X \rightarrow \min$) の条件を共に満足した解を求めることができる。
- 2) ここで提案したフリーネット解の計算手法は、観測方程式の係数が簡単な形となるGPS測量や水準測量により構成される測量網の調整計算に適している。