

III-433 数値拡散を抑えたオイラー・ラグランジェ手法を用いた移流拡散解析手法

大成建設(株)技術研究所 正会員 ○井尻裕二
Lawrence Berkeley Laboratory 唐崎建二

1. はじめに

移流拡散問題を数値解析的に解く場合に問題となる数値拡散を抑制するために、これまでに多くの研究がなされてきた。Neuman¹⁾²⁾はオイラー・ラグランジェ手法の中で移流と拡散を別々に取扱い、移流を粒子追跡法、拡散を差分法や有限要素法等により解くことにより数値拡散を抑える手法を提案している。Yeh³⁾は、このNeumanのオイラー・ラグランジェ手法を踏襲しながら、各時間ステップの中で濃度勾配が大きいいわゆる濃度フロント周辺の要素に対してはより細かく分割した要素を用いることによって内挿に伴う誤差を少なくする手法を提案している。

一方、Karasaki⁴⁾⁵⁾は、移流による濃度変化を内挿だけに頼らずに、有限要素法において各時間ステップ毎に濃度フロント周辺に新たに節点を発生させることによって数値拡散を抑える手法を開発している。この手法においては、一度発生させられた節点は濃度フロントが通過して再び濃度勾配が小さくなった場合には消去されるため、時間とともに節点数が無限に増加することなく効率的な計算が可能である。ただし、この手法は、1次元要素によるネットワークモデルのみに適用されている。

そこで、本報では、このKarasakiの手法を2次元平面要素へ適用し、理論解との比較によりその解析精度の検証を行った。2次元平面内で時間ステップ毎に新しく節点が発生・消去できる手法は、物質移行問題に限らず、地盤の安定解析等においても応力集中部に自動的に節点を増加発生させることによって解析精度を向上できるだけでなく、モデル化の際の複雑さを少なくすることもできるものと考えている。

2. 支配方程式と数値解析手法

移流拡散の支配方程式は以下のように表される。

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla(D \cdot \nabla c - vc) + q$$

ここに、 c は濃度、 D は拡散係数、 v は流速、 q は流入入量であり、流速は流れ場をガラーキン法を用いた有限要素法により解いて求めた。移流と拡散は、それぞれ以下のようにして求められる。

移流については、Neumanの粒子追跡法を粒子に対してではなく節点に対して用いている。すなわち、全節点の時間 $t + \Delta t$ における濃度は、各節点から時間 Δt だけ流れをさかのぼった点の時間 t における濃度を与える。さらに、時間 t において濃度勾配が大きい領域内にある節点に対しては時間 Δt だけ流れに沿った点に新しく節点を作成し、もとの節点の濃度を与える。また、以前の時間ステップで既に作成された節点で、濃度フロントが通過して濃度勾配が再び小さくなり不必要となったものは自動的に消去される。したがって、各時間ステップ毎に新しく節点で作られて要素が新しく切りなおされ、有限要素法におけるマトリックスも書き換えられることになる。本手法では、節点に対して粒子追跡法を用いているため、Neumanの結果に見られるようにモデルに投入する粒子数に計算結果が依存するようなことはない。

拡散については、粒子追跡法で求められた濃度に対してガラーキン法による有限要素法を用いて計算している。流れと拡散の有限要素法の計算にはともに線形の形状関数を三角形要素に対して用いている。有限要素法の定式化については文献6)を参照されたい。

3. 解析例と考察

定常な流れ場における1次元の移流拡散方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x}$$

初期条件 $c(x, 0) = 0$ 、境界条件 $c(0, t) = 1$ のもとでこの式の解は次式となる。

$$c(x,t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x-vt}{\sqrt{4Dt}}\right) + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{vx}{D}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x+vt}{\sqrt{4Dt}}\right)$$

ここに、 $\operatorname{erfc}(x)$ は余誤差関数である。まず、この問題に対する解析コードの精度を検証するためにペクレ数 ($Pe = v\Delta x/D$) の異なる2つのケースについて解析を行った。ケース1 ($D=10^{-5}$, $v=10^2$, $\Delta t=5$, $\Delta x=0.01$) とケース2 ($D=10^{-6}$, $v=10^2$, $\Delta t=5$, $\Delta x=0.01$) のペクレ数はそれぞれ10と100であり、クーラン数 ($Cr = v\Delta t/\Delta x$) はともに5である。時間 $t=50$ におけるケース1および2の解析結果と理論解をそれぞれ図-1と2に示す。これらの結果より、比較的大きなペクレ数で、しかもクーラン数が1より大きいにもかかわらず精度の良い結果が得られることが明かとなった。

次に、図-3に示すような、濃度固定点近傍以外に節点の無い不等間隔メッシュ ($0 \leq x \leq 0.2$ は $\Delta x=0.01$ 、 $0.2 < x < 1$ には節点無し) を用いてケース1と同じパラメーターを用いて解析を行った。時間 $t=50$ における解析結果と理論解を図-4に示す。この図より明かなように、初期モデルには $x=0.2$ と1.0の間に節点が無いにもかかわらず、時間ステップ毎に濃度フロント周辺に新しく節点を作成され、最終時間ステップ($t=50$)においても比較的精度の良い結果が保たれていることがわかる。

4. おわりに

これまでのオイラー・ラグランジェ手法による移流拡散解析では粒子追跡法による移流項の計算において内挿により固定節点の濃度を求めているため、精度の良い結果を得るためにはある程度細かなメッシュが必要であった。しかし、本手法では自動的に濃度フロント周辺に節点を新しく作成するため、あらかじめメッシュを細かくする必要はなく、比較的大きな粗いメッシュでも精度の良い結果が得られる。節点数および要素数の変化に伴い時間ステップ毎にマトリックスを計算しなおす手間がかかるものの、濃度フロント周辺のみ密な最小限の節点により効率的な解析ができるため、結果的にはより少ない計算時間で精度の良い結果が得られるものと考えている。

参考文献

- 1) Neuman, S.P. (1981) J. of Computational Physics, Vol. 41, pp.270-294.
- 2) Neuman, S.P. (1984) Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 20, pp.321-337.
- 3) Yeh, G.T. (1990) Water Resources Research, Vol. 26 No.6, pp.1133-1144.
- 4) Karasaki, K. (1987) LBL Report, No.22090, pp.55-57.
- 5) Karasaki, K. (1988) LBL Report, No.24200, pp.175-176.
- 6) Ijiri, Y. and Karasaki, K. (1994) Proc. of 10th Int. Conf. on Computational Methods in Water Resources (投稿中)

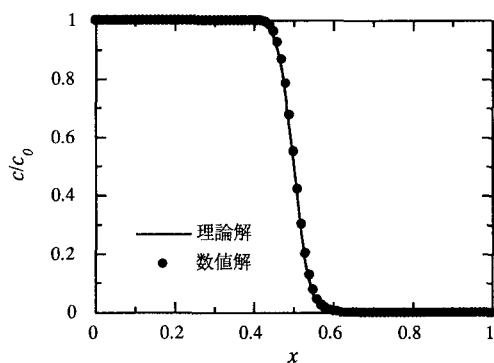


図-1 濃度分布図 ($t=50, Pe=10, Cr=5$)

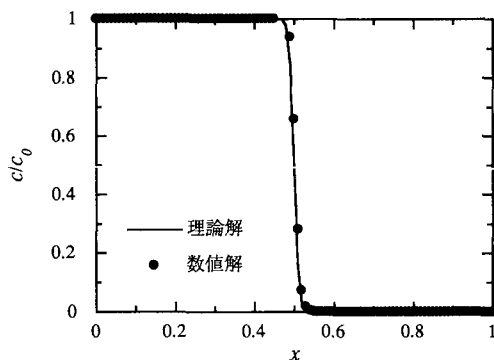


図-2 濃度分布図 ($t=50, Pe=100, Cr=5$)

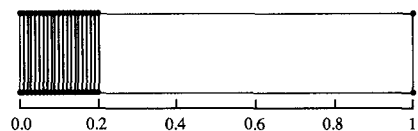


図-3 メッシュ図 (●は節点を示す)

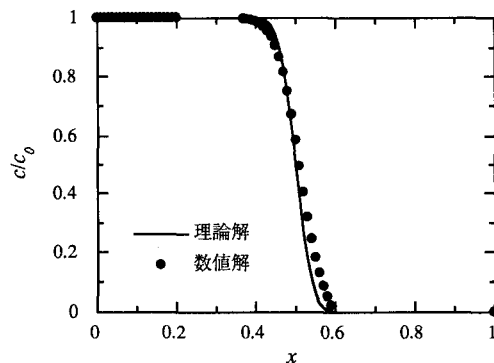


図-4 濃度分布図 ($t=50$)