III-212　粘土の弾／粘塑性モデル－流動曲面モデルとクリープポテンシャルモデル－

大阪大学工学部　正 会 員　○阿　部　信　晴
大阪大学大学院　学生会員　　隅　水　友　顕
大阪大学大学院　学生会員　　安　井　利　彰

１．まえがき

粘土の塑性変形と時間依存性変形の両者を考慮する非弾性構成式は，レオロジー・モデルによって時間依存性挙動を表現しょうとする力学モデル論（mechanical model theory)によるモデルと粘塑性ポテンシャルを仮定する状態方程式論（state equation theory)によるモデルに大別される。粘塑性ポテシンシャルを仮定する弾／粘塑性モデルには流動曲面モデル，クリープポテンシャルモデル，超過応力モデルがある。本報告ではCam-clay modelに基づく新たな流動曲面モデルとクリープポテンシャルモデルを提案するとともに，そのモデル特性について検討している。

２．粘土の弾／粘塑性モデル

●流動曲面モデル(flow surface model)

流動曲面モデルは，非粘性の弾塑性モデルと同様な理論構成の中に時間依存性の変数を導入することにより，時間とともに変化する負荷曲面の概念に基づくモデルである。非定常の負荷曲面は流動曲面と呼ばれる。流動関数（流動曲面の数式表現）を導くために次式のクリープ式を仮定する。

$$\text{(1)}\qquad \dot{X}=\frac{\dot{X}_r}{(1+\beta t)^{\alpha+1}}$$

$\dot{X}$はクリープ硬化変数の速度（粘性ひずみ速度）であり，$\dot{X}_r$, α, βは定数である。(1)式から時間 t を消去し，$\mu=\dot{X}_r/\beta$とおくと，

$$\text{(2)}\qquad \alpha=0 \qquad \frac{X}{\mu}=-\ln\left(\frac{\dot{X}}{\dot{X}_r}\right)$$

$$\text{(3)}\qquad \alpha\neq0 \qquad \frac{X}{\mu}=\frac{1}{\alpha}\left[1-\left(\frac{\dot{X}}{\dot{X}_r}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right]$$

(2)式では収束性のクリープ挙動を表現することができないので，内部拘束ひずみ速度δを導入した次式のクリープ式を用いる。

$$\text{(4)}\qquad \alpha=0 \qquad \frac{X}{\mu}=-\ln\left(\frac{\dot{X}}{\dot{X}_r}+\delta\right)$$

Cam-clay modelを流動曲面モデル化する場合，Cam-clay modelは塑性体積ひずみをひずみ硬化変数とする等方硬化モデルであるから，クリープ硬化変数Xとして粘性体積ひずみv^vを採用する。粘塑性体積ひずみv^{vp}は塑性体積ひずみv^pと粘性体積ひずみv^vの和で与えられるとし，$t=0$で粘塑性体積ひずみ$v^{vp}=v^p+v^v=0$なる初期条件でクリープ式（(4)，(3)式）を時間積分することにより流動関数Fが求められる。

(5)　$\alpha=0$

$$F=\mu\ln\left[\frac{1}{\delta}\left[\left\{1-\exp\left(-\frac{\delta}{\mu}\dot{v}^v_r t\right)\right\}\exp\left(\frac{v^p}{\mu}\right)+\delta\exp\left(-\frac{\delta}{\mu}\dot{v}^v_r t\right)\right]\right]-v^{vp}=0$$

(6)　$\alpha\neq0$

$$F=\frac{\mu}{\alpha}\left\{1+\alpha\left(\frac{v^p}{\mu}\right)\right\}\left[1-\left[1+\frac{\dot{v}^v_r}{\mu}t\left\{1+\alpha\left(\frac{v^p}{\mu}\right)\right\}^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{-\alpha}\right]-v^{vp}=0$$

流動関数Fの中の塑性体積ひずみv^pは，Cam-clay model により次式で与えられる。

$$\text{(7)}\qquad v^p=f=\frac{\lambda-\kappa}{1+e_0}\left[\ln\left(\frac{p}{p_0}\right)+\frac{\eta}{M}\right]$$

●クリープポテンシャルモデル(creep potential model)／

クリープポテンシャルモデルは，負荷・除荷に関わらず，すべての応力状態において弾性ひずみとクリープひずみ（粘塑性ひずみ）が常に存在するという基本仮定に基づいており，降伏関数，負荷基準を必要としない。Cam-clay modelモデルのクリープポテンシャルモデル化では，状態変数をクリープ体積ひずみv^c（＝粘塑性体積ひずみv^{vp}）とすれば，(5)，(6)，(7) 式から移行式は以下のように求められる。

$$(8)\qquad \alpha=0 \qquad \dot{v}^{c}=\dot{v}^{v}_{r}\left[\exp\left(\frac{f-v^{c}}{\mu}\right)-\delta\right]$$

$$(9)\qquad \alpha\neq 0 \qquad \dot{v}^{c}=\dot{v}^{v}_{r}\left[1+\alpha\left(\frac{f-v^{c}}{\mu}\right)\right]^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$$

一方，クリープ流れ則は次式で与えられる。

$$(10)\qquad \dot{\varepsilon}_{ij}=\lambda\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}$$

ここに，ｇはクリープポテンシャルである。移行式とクリープ流れ則は次式によって関連づけられ，スカラーパラメータλが求められる。

$$(11)\qquad \dot{v}^{c}=\lambda\frac{\partial g}{\partial p}\quad\rightarrow\quad\lambda=\frac{\dot{v}^{c}}{\left(\dfrac{\partial g}{\partial p}\right)}$$

この条件式は，適応条件式を用いないモデル（クリープポテンシャルモデル，超過応力モデル）には必ず適用されなければならない。 (8)，(9)，(10)，(11)式からクリープポテンシャルモデルのクリープひずみ速度は次式で表される。

(12) $\alpha=0$

$$\dot{\varepsilon}^{c}_{ij}=\dot{v}^{v}_{r}\left\langle\exp\left(\frac{f-v^{c}}{\mu}\right)-\delta\right\rangle\frac{\dfrac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}}{\left(\dfrac{\partial g}{\partial p}\right)}$$

(13) $\alpha\neq 0$

$$\dot{\varepsilon}^{c}_{ij}=\dot{v}^{v}_{r}\left\langle 1+\alpha\left(\frac{f-v^{c}}{\mu}\right)\right\rangle^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\frac{\dfrac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}}{\left(\dfrac{\partial g}{\partial p}\right)}$$

クリープポテンシャルｇはｆに等しいものと仮定される。〈・〉はMacauley bracketである。

(3) 式のクリープ式に基づく流動曲面モデル((6) 式）とクリープポテンシャルモデル((12) 式）は，今回新たに提案されたものである。

３．流動曲面モデルの構造と特性

同じクリープ式から導かれた流動曲面モデルとクリープポテンシャルモデルは等価である。しかし，(5)式と (11) 式，あるいは (6)式と (12) 式を比較すると明らかなように，流動関数((5)，(6) 式）は時間を変数として含んでいる。これは流動曲面モデルは時間硬化モデル，クリープポテンシャルモデルはひずみ硬化モデルということであるが，一般には定式化において構成式が自然時間に陽に依存することは避けるべきであるとされており，時間を変数として含むことが流動曲面モデルの問題点として指摘されることがある。この指摘は時間変数ｔの原点をどのように取るかという問題に関係している。流動曲面モデルは時間変数ｔを含んでいるが，粘土の堆積が始まる時点を時間原点にとる必要はない。自然粘土の堆積後の時間－負荷履歴を正確に知ることはできないので，そのような解析は現実的でない。流動曲面モデルでは負荷の行われる着目時点を時間変数ｔの原点にとることができる。これは流動関数Ｆが移行式を瞬間粘塑性応答は存在しないという仮定のもとで時間積分することによって求められているからである。すなわち，弾性ひずみが卓越する負荷時応答が時間変数ｔを零とすることによって表現される。このことによって流動曲面モデルの時間変数ｔは自然時間と異なった性格を持つようになっている。そして，時間変数ｔ＝０の負荷時，粘土は基準状態にあると仮定されている。基準状態を規定するモデルパラメータは着目時点での粘土の実験応答に基づいて決定され，それまでの時間－負荷履歴の影響はこの中で評価されている。

初期負荷に続いて後続の負荷が行われるときも時間変数ｔは零とされ，再負荷時応答が表現される。時間変数ｔを零とすることによって新たな流動曲面が生成されるが，それまでの流動曲面は消滅することになる。このため，再負荷時までの時間－負荷履歴は失われる。時間－負荷履歴の影響を考慮する必要がある場合は，再負荷時に時間－負荷履歴に基づいて粘性パラメータを再決定するか，あるいは履歴変数を更新することが必要になる。このようなモデルの構造と特性から，流動曲面モデルは時間変数ｔを含んでいるが他のタイプのモデルと同様な解析を行うことができる。

４．あとがき

流動曲面モデルはクリープ式を時間積分することにより導かれているので，モデルの特性が比較的理解しやすく，また利用しやすいのが特徴である。しかし，積分可能なクリープ式でしかモデル化することができない。これに対して，クリープポテンシャル理論によれば様々なクリープ式と弾塑性モデルを組み合わせることができ，多様な弾／粘塑性モデルを導くことができる。