# III－192　等方硬化弾塑性モデルに関する研究

大阪市立大学工学部　正員　望月　秋利
（株）日本地殻調査　正員　蔡　敏
（株）大林組技術研究所　正員　高橋　真一

## 1．はじめに

弾塑性論を土の挙動解析に始めて適用したDruckerは、土の応力・変形特性を検討し、土の構成式には静水圧軸に交わらない負荷曲面と交わる負荷曲面の二つが必要であることを示した。またPoorooshasbは砂に対して応力経路の異なる試験結果より、塑性ポテンシャルの存在と非関連流動則の必要性を示した。これらの考え方を合わせると、土の弾塑性挙動を表現するためには「非関連流動則を適用した二重負荷曲面を持つモデル」が必要となる。この結論は、筆者らの構成式に関する基本視点の１つで、この考え方にもとづいて砂の構成モデルを検討した。

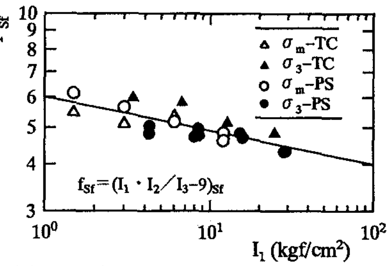
## 2、弾塑性モデルに関する考察

**表－1**は二重負荷曲面を持つモデルに関する構成成分とそれらに対する必要な条件を示す。すなわち「非関連流動則を適用した二重負荷曲面を持つモデル」の考え方に従う限り、表に示す各条件が必要になる。表中には、筆者らのモデル[1]とLadeモデル[2]を対応させて示した。いずれも全条件を満たし、モデルとしての基本形を構成している。以下に筆者らのモデルの特徴を成す破壊基準と硬化パラメータについて示す。

### 2.1 破壊基準 $f_{sf}$

「破壊基準が応力状態によって決まる」という考え方から、まず破壊基準の形を推定し、異なる応力経路の試験結果で検証する。$f_{sf}$は一般的に応力状態$\sigma_{ij}$により決まり、等方硬化の場合応力の不変量$I_1$、$I_2$、$I_3$により決まると考えられる。さらに砂材料を摩擦材料と仮定するので、$f_{sf}$は無次元の関数であるべきことと$I_1$、$I_2$、$I_3$を均等に考慮すべきことから「$I_1 \cdot I_2 / I_3$」が基本的な構成部分と考えた[1]。この項($I_1 \cdot I_2 / I_3$)は松岡・中井ら[3]がSMPの概念から導いた破壊基準と一致している。**図－1**は横軸を($I_1 \cdot I_2 / I_3 - 9$)、縦軸を$I_1$として、三軸圧縮試験と平面ひずみ試験の破壊時の結果をプロットしたものである。おおむね全試験結果が一本の線で表されるので、結局破壊基準は次式で表すことができる。

$$f_{sf} = (I_1 \cdot I_2 / I_3 - 9) \cdot I_1^{m} - \eta_f = 0 \qquad (1)$$




図－1　$(I_1 \cdot I_2 / I_3 - 9)_{sf}$関係

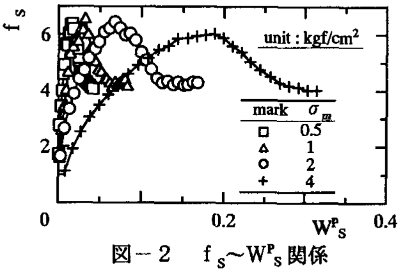
### 2.2 硬化パラメータ

硬化パラメータはその物理的な意味を考えて、塑性仕事($W^P{}_s$)にとることが多い。

$$W^P{}_s = \int (\sigma_{ij} d\varepsilon^{s}{}_{ij}) \qquad (2)$$

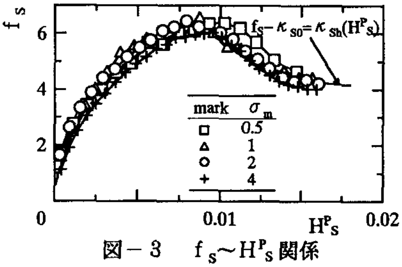
**図－2**は$\sigma_m$一定・平面ひずみ試験の$f_s$～$W^P{}_s$関係を示しているところが、$f_s$～$W^P{}_s$関係が一本の線にならないので、塑性仕事$W^P{}_s$を硬化パラメータとして用いることは適切でない。**図－2**の $f_s$～$W^P{}_s$ 関係は応力が大きい程同じ$f_s$に対して$W^P{}_s$が大きくなっている点に注目し、$W^P{}_s$を$\sigma_{kk}{}^t$で除して、次式に示す$H^P{}_s$を新しい硬化パラメータとした[1]。

$$H^P{}_s = \int (\sigma_{ij} d\varepsilon^{s}{}_{ij}) / \sigma_{kk}{}^t \qquad (3)$$




図－2　$f_S$～$W^P{}_S$関係

$t=1$の場合、諸戸[4]の提案した「応力経路によらず応力比と唯一の関係を持つパラメータ」と同じ形になる。**図－3**は$f_s$～$H^P{}_s$の関係を示し、ほぼ唯一の関係となっている。




図－3　$f_S$～$H^P{}_S$関係

## 3．まとめ

２つの構成モデルに対し、二重負荷曲面を持つ弾塑性モデルの必要な条件を満足していることを検討するとともに、筆者らのモデルの特徴を示した。表－１は二重負荷曲面を持つ弾塑性モデルの必要な条件を網羅したもので、弾塑性モデルを検証するための一種の”物差し”となりえると考えている。

表－１　二重負荷モデルの構成と必要条件

| | 項　目 | 弾塑性理論の必要条件<br>（二重負荷曲面を持つ弾塑性モデル） | Ｌａｄｅモデル[2)] | 著者らのモデル[1)] |
|---|---|---|---|---|
| 弾性特性 | 弾性定数<br>$(E, \nu)$ | Hooke則が成立し、ひずみエネルギが変位の関数として正値とすれば、<br>① $-1 \leq \nu \leq 0.5$<br>② $E \geq 0$ | $\nu$=定数<br>$E=K_{ur} \cdot \sigma_m{}^n$ | $\nu=\nu_0 \cdot [1-\sigma_m/(D+\sigma_m)]$<br>$E=E_0 \cdot \sigma_m{}^n$ |
| 塑性圧縮特性 | 負荷関数<br>$(f_c)$ | ① $f_c$は応力空間に置いて凸な関数。<br>② $f_c$は静水圧軸に対して直交。 | $f_c=I_1{}^2-2 \cdot I_2$<br>$=\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+\sigma_3{}^2$ | $f_c=I_1{}^2-2 \cdot I_2$<br>$=\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+\sigma_3{}^2$ |
| | 破壊基準 | ①塑性圧縮では破壊せず。 | ―――― | ―――― |
| | 硬化則<br>$(F_c)$ | ①等方硬化材料の一般硬化則：<br>$F_c=f_c(I_1, I_2, I_3)-\kappa_{c0}$<br>$-\kappa_{ch}(H^P{}_c)=0$<br>② $f_c$が一定値を保つ場合、$dH^P{}_c=0$。<br>③ $f_c$と$H^P{}_c$に唯一関係の存在。 | $F_c=C_c \cdot p_a \cdot (f_c/p_a{}^2)^p$<br>$-W^P{}_c$ | $F_c=f_c-(H^P{}_c/a)^{1/b}$ |
| | 硬化ﾊﾟﾗﾒｰﾀ$(H^P{}_c)$ | ① $H^P{}_c$は単調増加量。 | $dW^P{}_c=\sigma_{ij} d\varepsilon^C{}_{ij}$ | $dW^P{}_c=\sigma_{ij} d\varepsilon^C{}_{ij}$ |
| | 塑性ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ<br>$(g_c)$ | ① $d\varepsilon^C{}_{ij}$は塑性ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙに直交。<br>$d\varepsilon^C{}_{ij}=d\lambda \cdot (\partial g_c/\partial \sigma_{ij})$)<br>関連流動則→$g_c=f_c$；非関連流動則:$g_c \neq f_c$<br>②塑性仕事は正値（$dW^P{}_c \geq 0$） | $f_c=g_c$ | $f_c=g_c$ |
| せん断塑性特性 | 負荷関数<br>$(f_s)$ | ① $f_s$は応力空間において凸な関数。<br>② $f_s$は静水圧軸に交差せず。 | $f_s=(I_1{}^3/I_3-27) \cdot$<br>$(I_1/p_a)^m$ | $f_s=(I_1 \cdot I_2/I_3-9) \cdot I_1{}^m$ |
| | 破壊基準<br>$(f_{sf})$ | ①塑性状態から破壊状態への連続的推移。<br>②破壊基準は静水圧軸に交差せず。 | $f_{sf}=(I_1{}^3/I_3-27) \cdot$<br>$(I_1/p_a)^m$=定数 | $f_{sf}=(I_1 \cdot I_2/I_3-9) \cdot I_1{}^m$<br>=定数 |
| | 硬化則<br>$(F_s)$ | ①等方硬化材料の一般硬化則：<br>$F_s=f_s(I_1, I_2, I_3)-\kappa_{s0}$<br>$-\kappa_{sh}(H^P{}_s)=0$<br>② $f_s$が一定値を保つ場合、$dH^P{}_s=0$。<br>③ $f_s$と$H^P{}_s$に唯一関係の存在。 | $F_s=f_s-a \cdot e^{-b \cdot WP_s} \cdot$<br>$(W^P{}_s/p_a)^{1/q}$<br>$q=\alpha+\beta \cdot \sigma_3/p_a$<br>$a=\eta_1 \cdot (e \cdot p_a/W^P{}_{speak})^{1/q}$<br>$b=1/(q \cdot W^P{}_{speak})$<br>$W^P{}_{speak}=C_s \cdot p_a \cdot (\sigma_3/p_a)^L$ | $F_s=f_s-(\kappa_{s0}+\kappa_{sh})$<br>$=f_s-\kappa_{s0}-\kappa_1 \cdot \kappa_2$<br>$\kappa_1=H^P{}_s/(\alpha+\beta \cdot H^P{}_s)$<br>$\kappa_2=1-\zeta \cdot \exp[-(\xi \cdot H^P{}_s)^{-\gamma}]$<br>$\kappa_{s0}$、$\kappa_{sf}$、$\alpha$、$\beta$=定数 |
| | 硬化ﾊﾟﾗﾒｰﾀ$(H^P{}_c)$ | ① $H^P{}_s$は単調増加量。 | $dW^P{}_s=\sigma_{ij} d\varepsilon^S{}_{ij}$ | $dH^P{}_s=(\sigma_{ij} d\varepsilon^S{}_{ij})/\sigma_{kk}{}^t$<br>$=dW^P{}_s/\sigma_{kk}{}^t$ |
| | 塑性ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ<br>$(g_s)$ | ① $d\varepsilon^S{}_{ij}$は塑性ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙに直交。<br>$d\varepsilon^S{}_{ij}=d\lambda \cdot (\partial g_s/\partial \sigma_{ij})$)<br>関連流動則→$g_s=f_s$；非関連流動則→$g_s \neq f_s$<br>②塑性仕事は正値（$dW^P{}_s \geq 0$） | 非関連流動則を適用。<br>$g_s=I_1{}^3-\{27+\eta_2 \cdot$<br>$(p_a/I_1)^m\} \cdot I_3$<br>$\eta_2=s \cdot f_s+R \cdot (\sigma_3/p_a)^{1/2}$<br>$+t$ | 非関連流動則を適用。<br>$g_s=I_1 \cdot I_2-[9+\omega \cdot I_1{}^{-m}] \cdot I_3$<br>$\omega=\chi \cdot f_s=\chi \cdot (\kappa_{s0}+\kappa_{sh})$ |


参考文献 1) 蔡 敏・望月秋利・高橋真一：砂の$\sigma_m$一定・平面ひずみ試験と二重負荷曲面を持つ構成式の検討，土木学会論文集，No.487, Ⅲ-26, pp.197-206, 1994.

2) Lade, P.V. and Oner, M.: Elasto-Plastic Stress-Strain Model, Parameter Evaluation, and Predictions for Dense Sand, Constitutive Relations for Soils, Results of the International Workshop on Constitutive Relations for Soils, Edited by Gudehus, G., Daver, F. and Vardoulakis, I., Balkema, Netherlands, pp.159-174, 1984.

3) Matsuoka, H. and Nakai, T.: Stress-Strain Relationship of Soil Based on the SMP, Constitutive Equations of Soils, 9th ICSMFE, Speciality Session, 9, pp.153-162, 1977.

4) Moroto, N.: A New Parameter to Measure Degree of Shear Deformation of Granular Material in Triaxial Compression Tests, Jour. of JSCE, Soils and Foundations, Vol.16, No.4, pp.1-9, 1976.