

II-306

開水路平面2次元流れせん断混合層の空間的安定解析

和歌山工業高等専門学校 正 員 木村一郎
 京都大学工学部 正 員 細田 尚
 東京電力 正 員 友近文志
 京都大学大学院 学生員 安永 良

1. はじめに: 静水圧を仮定した平面2次元流れの基礎式のせん断混合層における特性を把握するため、tanh型流速分布を仮定した時間に関する非粘性線形安定解析が行われている¹⁾。しかし、噴流や急拡部の流れのように空間的に発達する流れ場では、時間に関する解析よりも空間的安定解析の方が、より現象に適合することがオイラー方程式の場合について示されている²⁾。これをふまえ、本研究では平面2次元流れの基礎式について空間に関する非粘性線形安定解析を試みる。

2. 線形化方程式の誘導: 本研究では平面2次元流れの基礎式の粘性項、底面摩擦項を省略した次式（ナビエ・ストークス方程式に対するオイラー方程式に対応）を用いる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (1-a)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial uM}{\partial x} + \frac{\partial vM}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (1-b)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial uN}{\partial x} + \frac{\partial vN}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (1-c)$$

ここに、 h : 水深、 (u, v) : 水深平均流速ベクトルの (x, y) 方向成分、 (M, N) : 各々 $M = hu$, $N = hv$ で定義される流量フラックス、 (x, y) : 空間座標、 t : 時間を表す。 h, u, v を次式のように平均値とそれからの偏差の和で表し、基礎式系を線形化する。

$$h = h_0 + h', \quad u = U_0(y) + u', \quad v = v' \quad \dots\dots\dots (2)$$

(2)を(1)式に代入し2次以上の微小項を無視し u', v' を消去すると、 h' に関する線形化方程式が導かれる。

$$\frac{\partial^3 h'}{\partial t^3} + 3U_0 \frac{\partial^3 h'}{\partial t^2 \partial x} + (3U_0^2 - gh_0) \frac{\partial^3 h'}{\partial t \partial x^2} - gh_0 \frac{\partial^3 h'}{\partial t \partial y^2} + U_0(U_0^2 - gh_0) \frac{\partial^3 h'}{\partial x^3} - gh_0 U_0 \frac{\partial^3 h'}{\partial x \partial y^2} + 2gh_0 \frac{dU_0}{dy} \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (\#)$$

3. 基礎式の空間に関する安定解析:

まず、次のような無次元量を導入する。

$$\tilde{x} = \frac{x}{h_0}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{l}, \quad \tilde{t} = \frac{tU_0}{h_0}, \quad \tilde{h}' = \frac{h'}{h_0}, \quad \tilde{U}_0 = \frac{U_0}{U_{0\infty}}$$

$$Fr_0 \equiv \frac{U_{0\infty}}{\sqrt{gh_0}} \quad (l: \text{主流流速分布の長さのスケール})$$

次に、水深変動 h' を次のようにおく。

$$\tilde{h}' = \epsilon \phi(\tilde{y}) \exp[i(\tilde{k}\tilde{x} - \tilde{\beta}\tilde{t})] \quad \dots\dots\dots (3)$$

(3)式中の ϵ は擾乱の大きさを表す定数、 $\tilde{k}$, $\tilde{\beta}$ は次式で定義される無次元変量である。

$$\tilde{k} = kh_0, \quad \tilde{\beta} = \beta h_0 / U_{0\infty}$$

以後、すべて無次元量を取り扱うので $\sim$ を省略する。(3)式を

(#)式の無次元形に代入すれば、 ϕ に関する関係式としてレーリー方程式に対応する次式が導かれる。

$$(kU_0 - \beta) \frac{d^2 \phi}{dy^2} - 2k \frac{dU_0}{dy} \frac{d\phi}{dy} + \zeta^2 (kU_0 - \beta) \{ F_r^2 (kU_0 - \beta)^2 - k^2 \} \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで $\zeta = l/h_0$ とした。図-1に示した hyperbolic-tangent 型の流速分布

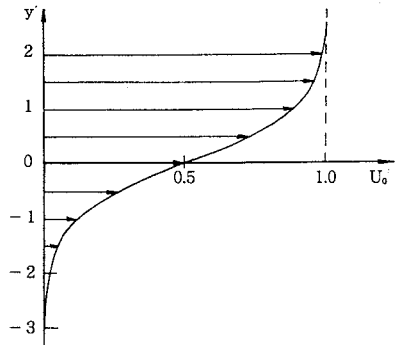


図-1 tanh 型流速分布

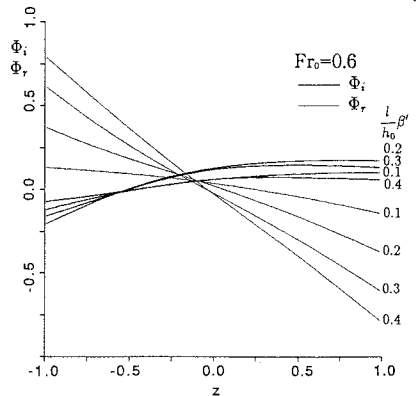


図-2 k_r と k_i の同定

$U_0 = 0.5 \cdot (1 + \tanh y) \dots\dots\dots (5)$
 を仮定する。問題は、『境界条件 $y \rightarrow \pm\infty$ のとき $\phi \rightarrow 0$ のもとで有意な解 ϕ が存在するための β と k の関係を求めること。』と書き表される。Michalke²⁾に従い次の変数変換を行う。

$$\phi \sim \exp\left(\int \Phi dy\right) \dots\dots\dots (6)$$

さらに、次式により $y \rightarrow \pm\infty$ を有限値 $z \rightarrow \pm 1$ に変換する。

$$z = \tanh y \dots\dots\dots (7)$$

これらを、(4) 式に代入すると、 Φ に関する 1 階の常微分方程式が導かれる。また、 $z \rightarrow \pm 1$ のときの境界条件は 0/0 の不定形が現れるため、ロピタルの定理を用いて求める。これらの式を Runge-Kutta 法を用いて数値的に解き、 $z = 0$ における両方向からの Φ_r, Φ_i がそれぞれ一致するように、 k_r, k_i を同定することにより、 k_i と β の関係が導かれる。

4. 安定解析結果の考察: $Fr_0 = 0.6$ において k_i, k_r の同定を行ったのが図-2 である。さらに $Fr_0 = 0.3, 0.6, 0.9$ のそれぞれについて同定された ζk_i と $\zeta\beta$ の関係を図-3 に示した。 $Fr_0 = 0.6$ の場合、 $\zeta\beta = 0.205$ で増幅率が最大になる。また、図-3 で $k_i = 0$ (安定限界) となる 0 以外の $\zeta\beta$ の値は、次のように求まる。

$$\zeta\beta = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{Fr_0^2}{4}} \dots\dots\dots (8)$$

これより、 $Fr_0 \geq 2$ ではせん断不安定は生じないことがわかる。

次に、 β/k_r と $\zeta\beta$ の関係を示したのが図-4 である。時間に関する安定解析では攪乱の位相速度が波数やフルード数によらず一定値 (0.5) であったのに対し、空間的安定解析では、これらに依存することがわかる。

次に、 u', v' を次のようにおく。

$$u' = \epsilon \phi_u(y) \exp i(kx - \beta t)$$

$$v' = \epsilon \phi_v(y) \exp i(kx - \beta t)$$

これらを (1-a) ~ (1-c) 式の線形化方程式に代入し、先に求めた ϕ を用いると、 ϕ_u, ϕ_v を求めることができる。図-5 は、横軸を y として ϕ_{ur}, ϕ_{ui} を示したものである。この図で ϕ_{ur} と ϕ_{ui} がそれぞれ y が 0 よりやや負の位置、約 0.9 付近でどちらも 0 となっている。すなわち、ここで u' が 0 になることがわかり、Michalke がレーリー方程式に対して示しているのと同様²⁾、流速変動に関する位相の反転 (phase-reversal) が起こっていると考えられる。

5. おわりに: 開水路平面 2 次元流れの空間的安定解析により、波数と増幅率、位相速度の関係が求まるとともに、攪乱の位相の反転が示された。今後、実際の流れ場の数値解析結果との比較を行っていきたい。

参考文献

- 1) 細田尚・木村一郎: 開水路急拡部の流れにおける渦の発生・発達に関する二、三の検討, 水工学論文集, 第 37 巻, pp.463-468, 1993.
- 2) Michalke, A: On spatially growing disturbances in a inviscid shear layer, J. Fluid Mech., vol.23, pp.521-544, 1965.

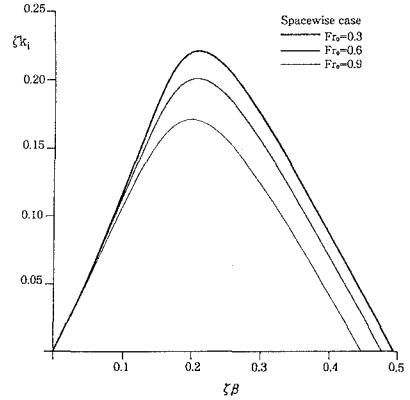


図-3 $\zeta\beta$ と ζk_i の関係

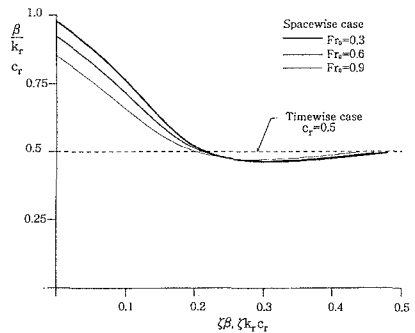


図-4 $\zeta\beta$ と β/k_r の関係

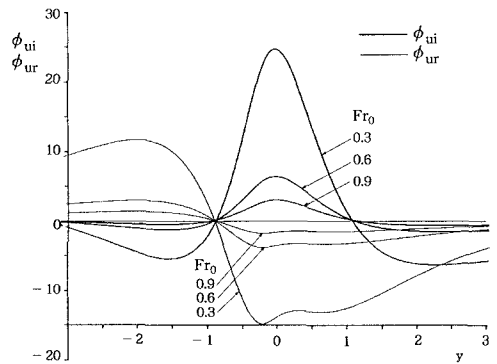


図-5 ϕ_{ur} と ϕ_{ui} の分布