

II-300

開水路乱流における水面近傍での乱流量の挙動

東京大学工学部 正員 河原 能久

1. はじめに

近年、NS方程式の直接数値解析(DNS)が盛んに行われている。DNSは低レイノルズ数という制約を受けるものの、流れ場の詳細な構造の検討や流れの制御の可能性の検討を可能としている。また、DNSによるデータベースの構築は従来の乱流モデルの開発手法を大きく変化させ、信頼性の高い乱流モデルの開発に多大な影響を与えている。しかし、開水路乱流に適用できる乱流モデル、とりわけ水面効果を正確に表現できるモデルには開発の余地が多い。これは、水面の存在により強められる乱れの異方性の表現や水面の変動の取扱いが十分理解されていないためであると考えられる。本研究は、水面変動を無視することができる開水路乱流場を対象として(DNSによるデータベースに対応する)に対して、乱流諸量が水面近傍でいかに変化するかを解析したものである。そのような情報は今後の乱流モデルの開発に有用であると考えられる。

2. 基本的な考え方

図-1に示すように、最も基礎的な十分発達した2次元開水路乱流場を対象とする。自由水面を平面と仮定し、そこではせん断応力が作用しないこと、また水面に垂直方向の変動成分はゼロであるものとする。このとき、変動速度および変動圧力の水深方向の分布を水面位置のまわりでTaylor展開する。境界条件、連続式、運動量方程式を用いて、それらの分布関数形を定める。全ての変動速度成分と圧力の分布形を基に、水面近傍でのレイノルズ応力や乱れのエネルギーおよびその散逸率を求める。また、厳密なレイノルズ応力方程式に現れる素過程の挙動を検討する。さらに、乱流量に対する境界条件の与え方を論ずる。

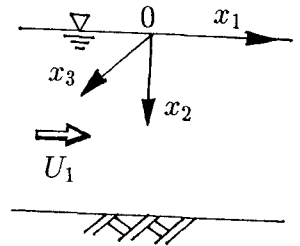


図-1 解析対象と座標系

3. 平均流速および変動成分の分布形

基礎方程式は平均流および変動流速に対する連続の式と運動量の式である。座標軸を図-1のように設定する。平均流速としてゼロでない成分は主流(U_1)のみである。平均流速に対する水面での境界条件はせん断応力がゼロの条件であるので、主流の流速分布は水面近傍で以下のように表される。

$$U_1 = a_U + c_U y^2 + O(y^3)$$

ここで、 a_U, c_U : 定数、 y : 水面からの距離であり、簡単のために U_1, y は摩擦速度と動粘性係数も用いて無次元化されているものとする。

一方、乱れ成分についての水面での境界条件は、

$$u_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0$$

である。これらは水面でのせん断応力がゼロである条件、連続式をさらに x_2 で微分した式、および x_2 方向の運動量の式より得られる。これらの情報を用いて変動量の分布形を求めると以下ようになる。

$$u_1 = a_1 + c_1 y^2 + d_1 y^3 + O(y^4)$$

$$u_2 = b_2 y^2 + d_2 y^3 + O(y^4)$$

$$u_3 = a_3 + c_3 y^2 + d_3 y^3 + O(y^4)$$

$$p = a_p + c_p y^2 + d_p y^3 + O(y^4)$$

乱れ速度と圧力は無次元化されており、 $a_1, \dots, d_p$ は x_1, x_3, t の関数である。 a_p は本来ゼロとなるべきであるが、水面を仮定の蓋と仮定して数値解析する場合にも適用できるように当面残しておく。なお、連続式より次の関係式が得られる。ただし、カンマは偏微分を意味する。

$$a_{1,1} + b_2 + a_{3,3} = 0$$

4. 乱流統計量の挙動

変動速度成分の分布形より，無次元化されたレイノルズ応力，乱れエネルギー，その散逸率は次のように求められる。

$$\begin{aligned}\overline{u_1^2} &= \overline{a_1^2} + 2\overline{a_1 c_1} y^2 + O(y^3) \\ \overline{u_2^2} &= \overline{b_2^2} y^2 + 2\overline{b_2 d_2} y^4 + O(y^5) \\ \overline{u_3^2} &= \overline{a_3^2} + 2\overline{a_3 c_3} y^2 + O(y^3) \\ \overline{u_1 u_2} &= \overline{a_1 b_2} y + (\overline{a_1 d_2} + \overline{b_2 c_1}) y^3 + O(y^4) \\ k &= \frac{1}{2}(\overline{a_1^2} + \overline{a_3^2}) + \frac{1}{2}(\overline{b_2^2} + 2\overline{a_1 c_1} + 2\overline{a_3^2}) y^2 + O(y^3) \\ \varepsilon &= (\overline{a_{1,1}^2} + \overline{a_{1,3}^2} + \overline{b_2^2} + \overline{a_{3,1}^2} + \overline{a_{3,3}^2}) + O(y^2)\end{aligned}$$

これらの結果より，乱流モデルに対して与えるべき水面での境界条件は以下ようになる。 $\overline{u_i^2} (i=1, 2, 3)$, k , ε については，それらの値を指定する ($\overline{u_2^2}$ についてはゼロ) 方法，あるいは水深方向の勾配をゼロとする方法は漸近挙動と矛盾しない。ただし，値を指定する場合には実験式などを整備することが必要である。また， $\overline{u_1 u_2}$ については水面にてゼロを与えることになる。

5. レイノルズ応力の収支

レイノルズ応力の輸送方程式は以下のように表される。

$$\begin{aligned}\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} &= 0 = P_{ij} - \varepsilon_{ij} + \Phi_{ij} + \Pi_{ij} + T_{ij} + D_{ij} \\ P_{ij} &= -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}, \quad \varepsilon_{ij} = 2 \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}, \quad \Phi_{ij} = \overline{p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \\ \Pi_{ij} &= -\left(\frac{\partial \overline{p u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{p u_j}}{\partial x_i} \right), \quad T_{ij} = -\frac{\overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k}, \quad D_{ij} = \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k}\end{aligned}$$

$\overline{u_1^2}$, $\overline{u_2^2}$, $\overline{u_3^2}$, $\overline{u_1 u_2}$ について各素過程の主要項を示したものが表-1である。

表-1 レイノルズ応力の素過程の主要項

	$\overline{u_1^2}$	$\overline{u_2^2}$	$\overline{u_3^2}$	$\overline{u_1 u_2}$
P_{ij}	$-2\overline{a_1 b_2 c_1} y^2$	0	0	$-2\overline{b_2^2 c_1} y^3$
ε_{ij}	$2(\overline{a_{1,1}^2} + \overline{a_{1,3}^2})$	$2\overline{b_2^2}$	$2(\overline{a_{3,1}^2} + \overline{a_{3,3}^2})$	$2(\overline{a_{1,1} b_{2,1}} + 2\overline{b_2 c_1} + \overline{a_{1,3} b_{2,3}}) y$
Φ_{ij}	$\overline{2a_p a_{1,1}}$ $+2(\overline{a_p c_{1,1}} + \overline{a_{1,1} c_p}) y^2$	$\overline{2a_p b_2}$ $+2(3\overline{a_p d_2} + \overline{b_2 c_p}) y^2$	$\overline{2a_p a_{3,3}}$ $+2(\overline{a_p c_{3,3}} + \overline{a_{3,3} c_p}) y^2$	$\overline{2(a_p c_1 + a_p b_{2,1}) y}$ $+3\overline{a_p d_1} y^2$
Π_{ij}	0	$-2\overline{a_p b_2}$ $-6(\overline{a_p d_2} + \overline{b_2 c_p}) y^2$	0	$-2(\overline{a_p c_1} + \overline{a_{1,1} c_p}) y$ $-3(\overline{a_p d_1} + \overline{a_{1,1} d_p}) y^2$
T_{ij}	$-\overline{a_1^2 b_2}$	$-3\overline{b_2^3} y^2$	$-\overline{a_3^2 b_2}$	$-2\overline{a_1 b_2^2} y$
D_{ij}	$4\overline{a_1 c_1}$	$2\overline{b_2^2}$	$4\overline{a_3 c_3}$	$6(\overline{a_1 d_2} + \overline{b_2 c_1}) y$

この表より，水面近くでは散逸と分子拡散とが大きな役割を演ずることが確認される。特に， $\overline{u_2^2}$ では散逸項と分子拡散項とがバランスしていること，圧力-歪速度相関項と圧力拡散項とが打ち消すように作用することなどが知られる。既存のモデルでは分子拡散項が含まれていなかったり，表中の各項の挙動が正確には表現されていないことが多い。例えば拡散項に対するモデルとしてよく使用される Dayly-Harlow モデルは上記の挙動を再現していない。また， $a_p = 0$ の場合には圧力-歪速度相関項と圧力拡散項は水面でゼロとなり， y については2次から始まる。このような各項の挙動は今後応力方程式モデルの開発を進める上で制約条件となると考えられる。

6. おわりに

水面を変動しない平面であると仮定することにより，変動量の水深方向の分布形状を論じ，乱流統計量の水面近傍での挙動を検討することが可能になる。管路乱流の対称面に対してはこのような取扱いは困難である。今後，ここでの結果を基に応力方程式モデルの改良を進めて行きたい。