

II-209

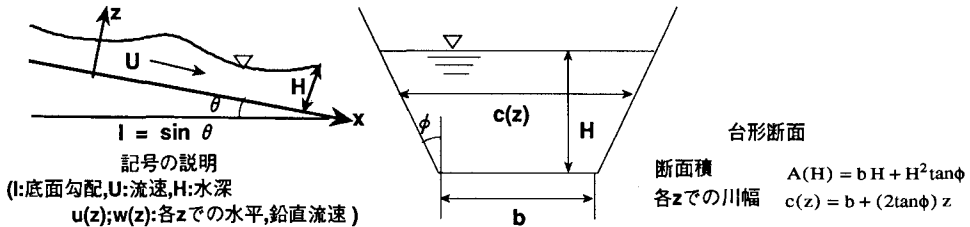
波の分散性を考慮した場合の等流の安定解析

筑波大学大学院 学生員 藤井信太郎
筑波大学 正会員 京藤 敏達

1. はじめに

河川に生じる不安定波の一例である転波列について多くの研究がなされてきた。Dressler¹⁾は、定常流中で圧力が静水圧分布をなすとし、シェジ型抵抗項を含んだ基礎式をShock条件を用いて解析し、転波の不連続解を導いた。岩佐²⁾はDresslerの式に運動量補正係数を含んだ式を用いて同様に解析し、転波列の発生条件を導いた。また後に、任意断面の開水路についての基礎式を用いて等流の安定解析を行い、同様の結果を得た。最近の研究としてはNeedhamとMerkin³⁾が、Dresslerの式に乱流による運動量拡散を渦粘性でモデル化した項を含んだ式を用いて、等流の安定解析を行った。これによりDresslerの導いた転波の発生条件と同様な結果を得、また転波の周期解が存在することを示した。本報では、断面平均した質量、運動量保存則を用いて等流の安定解析を行った。運動量保存の式には、鉛直方向流速を考えることで波の分散性を考慮し、またマニング型の抵抗項、渦粘性でモデル化した運動量拡散項を含んでいる。この式を線形安定解析して、不安定波の発生臨界値を求めた。また河川の断面形状の変化が臨界値にどのような効果を及ぼすか定性的な解析を行った。

2. 基礎方程式



基礎方程式は、水路の断面を台形とし、河床から水面にわたって積分し断面平均した質量および運動量の保存則を用いる。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(UA)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \beta U \frac{\partial U}{\partial x} + (1 - \beta) \frac{U}{A} \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} P_{xav} - g \left(\frac{n^2 U^2}{R^{4/3}} - 1 \right) + \nu_s \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

ここで、 β を運動量補正係数、 ρ を流体の密度、 P_{xav} を x 方向の圧力勾配の断面平均、 n をマニングの粗度係数、 R を径深、 ν_s を渦動粘性係数とする。

また、 P_{xav} は次式より求める。

$$P_{xav} = \int_0^H \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) c(z) dz / A, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \rho g, \quad w = \frac{z}{H c(H)} \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} + U \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) \right\}$$

基礎方程式を、等流状態の水深 H_n 、流速 U_n で無次元化すると次式になる。

$$\frac{1}{Fr} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(UA)}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{Fr} \frac{dU}{dt} + \beta U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{Fr} (1 - \beta) \frac{U}{A} \frac{\partial A}{\partial t} = -P_{xav} - M_n \left(\frac{U^2}{R^{4/3}} - 1 \right) + C_s \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

ここで用いられている無次元量を示す。

$$Fr = \frac{U_n}{\sqrt{g H_n}}, \quad B_h = \frac{H_n}{b}, \quad M_n = \frac{g n^2}{H_n^{1/3}}, \quad C_s = \frac{\nu_s}{H_n U_n}$$

3. 安定解析による発生臨界値の導出

等流の安定性を解析するために、

$$H = 1 + \epsilon h_f(x, t), \quad U = 1 + \epsilon U_f(x, t), \quad h_f(x, t) = A_h \exp(ikx + rt), \quad U_f(x, t) = A_u \exp(ikx + rt)$$

を無次元化した基礎式に代入し ϵ 1 次の方程式の可解条件を求めると、 r について2次、 k について4次の固有値方程式が導かれる。

$$r^2 \left(\frac{D}{Fr^2} + \frac{4B+3Ta}{12Fr^2} k^2 \right) + r \left(\frac{2DM_n}{E^{4/3}} + \frac{2\beta D}{Fr} i k + \frac{DC_s}{Fr} k^2 + \frac{4B+3Ta}{6} i k^3 \right) \\ + i \left\{ \frac{2M_n(6B+5B^2Co+16Ta+10BCoTa)}{3(2+BCo)E^{4/3}} \right\} k + \left(\frac{B+Ta}{Fr^2} - \beta D \right) k^2 + DC_s i k^3 - \frac{4B+3Ta}{12} k^4 = 0$$

$$(D=B+2Ta, E=(B+2Co)/(B+2/Co), Co=\cos\phi, Ta=\tan\phi, B=1/B_h)$$

ここで r は複素数であり、その実部は不安定波の時間増幅率に関する係数を、また虚部は角振動数を示している。流れがあるフルード数に達すると、時間増幅率が0の中立安定状態の流下波が生じる。この時のフルード数 Fr_{cr} 、波数 k_{cr} 、角振動数 ω_{cr} を、発生臨界値とする。特に水路を矩形断面と考えると $\phi=0$ とすると、臨界値は次のようになる。

$$Fr_{cr} = \frac{27C_s(1+2B_h)^2(2M_n-3C_s)}{4M_n^2+9C_s(\beta-1)(1+2B_h)\{9\beta C_s(1+2B_h)-2M_n(5+6B_h)\}}$$

$$k_{cr}^2 = \frac{4M_n\{15C_s-2M_n-9\beta C_s+18(\beta-1)C_sB_h\}}{C_s\{4M_n-18C_s(\beta-1)(1+2B_h)\}}, \quad \omega_{cr} = \text{Im}[r_{cr}] = \frac{\{2M_n + \frac{4M_n}{3(1+2B_h)} + C_s k_{cr}^2\} k_{cr} Fr_{cr}}{2M_n + C_s k_{cr}^2}$$

ここで上式は、 $mc=M_n/C_s$ の関数として表せることに注意する。

4. 発生臨界値についての定性解析

4-1. 渦動粘性の必要性

前節で求めた臨界値について、渦動粘性を考慮しない状態 $C_s \rightarrow 0$ とすると、 Fr_{cr} は0に収束する。これはすべてのフルード数で等流が不安定になることを示しており、渦動粘性の項が無ければ発生臨界値は存在しない。

4-2. 不安定波発生議論に有効なパラメータ領域について

臨界値が $k_{cr}^2 > 0$, $Fr_{cr}^2 > 0$ となるパラメータ領域は、幅広矩形水路の場合、 $M_n > 3C_s$ ($mc > 3$), $\beta < 25/21 \div 1.19$ の時である。

4-3. 線形近似を用いた定性解析

水路の断面が幅広矩形であり、かつ運動量補正係数 $\beta = 1.0$ である状態から各パラメータが変化した場合に臨界値に及ぼす効果を調べる。

臨界値の式は非常に複雑なので、線形近似;

$$F(\alpha) \cong F(\alpha_0) + \left(\frac{dF}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} (\alpha - \alpha_0)$$

を用いてパラメータの僅かな変化が及ぼす効果を解析する。

これにより得られた解析結果を以下に示す。

- ・運動量補正係数 β が増加するにつれて、臨界フルード数は増加する。また、そのときは波長は短くなり振動数が高くなる。
- ・単位幅流量を一定とした時、川幅水深比 H_n/b が増加、つまり川幅が狭くなるにつれて臨界フルード数は大きくなる。また波長は変化せずに振動数が高くなるので、波速は大きくなる。
- ・マンシングの項による効果 M_n と渦粘性の効果 C_s の比 mc が大きくなると、臨界フルード数は小さくなる。また波長は短くなり、振動数は高くなる。

参考文献

- (1) Dressler R. F.: Mathematical solution of the problem of roll-waves in inclined open channels, Comm. Pure Appl. Math., V.2, pp. 149-194, 1949.
- (2) 岩佐 義朗: 開水路水流の不安定限界について, 土木学会誌 40-1, pp.5-12, 1954.
- (3) Needham, D. J. and J. H. Merkin: On roll waves down an open inclined channel, Proc. R. Soc. Lond. A394, pp. 259-278, 1984.
- (4) 京藤 敏達: 河川早瀬の不安定波に関する理論的研究, 水工学論文集, V.38, 449-456, 1994
- (5) 林 泰造: 水の波, 応用水理学 上, p.164, 本間 仁 編, 丸善, 1957.