

II-169

射流急拡部を過ぎる流れの理論的解析

中央大学大学院 寺本 康宏
中央大学理工学部 日比野 忠史
中央大学理工学部 山田 正

1. はじめに

空気流中の外角を回る流れは内角を回る流れが斜め衝撃波を伴うのに対して膨張波を伴い、一様な超音速流が外角を回る場合の解はPrandtl(1907)とMeyer(1908)によって与えられている。開水路においても射流が急拡部をよぎる際に空気流中の膨張波と同様の性質を示す。例としてダムの放流口からの流出水、急流河川で見られる霞堤のような不連続堤及び決壊した堤防からの洪水時における氾濫水などが挙げられる。本研究はこのような射流急拡部での流れについてPrandtl-Meyerの空気流に現れる衝撃波の理論を応用し、Euler方程式の厳密解を示すとともに、その流れを解析したものである。

表1 基礎式及び解析解

2. 射流急拡部における流れ

図1のように2次元極座標(r, ϕ)をとり、 r, ϕ 方向の速度成分を u, v とすると、完全流体の運動方程式及び連続式は定常状態を考慮して(1), (2), 図1 流れの概要図(平面図)(3)式のように表される。いま一様な射流が図1のように壁面に平行に流れ込み、角を曲がる際に膨張すると考えたとこの流れには長さの次元が存在しないので流れは長さ r に無関係($\partial/\partial r=0$)である。このとき(1), (2), (3)式は(4), (5), (6)式と書き換えられる。(5)式から求めた $dh/d\phi$ を(6)式に代入して整理すると(7)式となる。 $dh/d\phi \neq 0$ より(6)式から $u+dv/d\phi \neq 0$ よって(8)式を得る。膨張波にエネルギー損失は少ないとした際のBernoulliの式と(8)式から(9)式が導かれる。これを(4)式に代入して正の方をとると(10)式となる。ここで $u=A, v=0$ となるのは $\sin(\alpha\phi)=1, \cos(\alpha\phi)=0$ となる角($\alpha\phi=90^\circ$)の場合である。すなわち $\phi=156^\circ$ となり、流れはこの角以上に回り込めないことになる。また流線を与える微分方程式は(11)式であり、(12)式のように解ける。水深 h については(6)式より(13)式のように解くことができる。ここに上流一様部の流速、フルード数をそれぞれ u_0, Fr_0 とすると ϕ_0 は(14)式で与えられる。

3. 解析結果

図2, 3, 4は上流一様部のフルード数 Fr_0 に対する流線図(平面図)を表している。図の縦軸は上流一様水深 h_0 で無次元化した流れに対して垂直方向の距離 y/h_0 であり、

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{v^2}{r} = -g \frac{\partial h}{\partial r} \quad (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{uv}{r} = -g \frac{\partial h}{\partial \phi} \quad (2)$$

$$\frac{\partial(rhu)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \phi}(hv) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{du}{d\phi} = v \quad (4)$$

$$\left(\frac{dv}{d\phi} + u\right)v = -g \frac{dh}{d\phi} = -gh \frac{1}{h} \frac{dh}{d\phi} = -c^2 \frac{1}{h} \frac{dh}{d\phi} \quad (5)$$

$$hu + h \frac{dv}{d\phi} + v \frac{dh}{d\phi} = 0 \quad (6)$$

$$\left(u + \frac{dv}{d\phi}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 0 \quad (7)$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 0, \quad v = c = \sqrt{gh} \quad (8)$$

$$v^2 = \frac{1}{3}(A^2 - u^2), \quad \frac{1}{2}u_0^2 + gh_0 = \frac{1}{2}A^2 \quad (9)$$

$$u = A \sin \alpha \phi, \quad v = A \alpha \cos \alpha \phi, \quad \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad (10)$$

$$\frac{dr}{r d\phi} = \frac{u}{v} = \frac{A \sin \alpha \phi}{A \alpha \cos \alpha \phi} = \frac{1}{\alpha} \tan \alpha \phi \quad (11)$$

$$r = r_0 \left(\frac{\cos \alpha \phi_0}{\cos \alpha \phi} \right)^{\frac{1}{\alpha^2}} \quad (\phi = \phi_0 \text{ のとき } r = r_0) \quad (12)$$

$$h(\phi) = h_0 \left(\frac{\cos \alpha \phi}{\cos \alpha \phi_0} \right)^2 \quad (\phi = \phi_0 \text{ のとき } h = h_0) \quad (13)$$

$$u_0 \cos \phi_0 = \sqrt{gh_0}, \quad \phi_0 = \arccos\left(\frac{1}{Fr_0}\right) \quad (14)$$

直線壁に対して無限遠に広がっている。横軸は流れ方向の無次元距離 x/h_0 を表す。図のように流れが回り込むことが可能な $0 \leq \phi \leq 156^\circ$ について、上流一様フルド Fr_0 数に対する外角を回る流れを考えることができる。図2のように上流一様部のフルド Fr_0 数が小さい場合は流線は疎となり流速は小さく、図3、図4のようにフルド Fr_0 数の増大とともに密となり流速大となる。また流線は $\phi = \phi_0$ を過ぎると ϕ 方向に回り込むことがわかる。図5, 6, 7は流線図と同様に上流一様フルド Fr_0 数の変化に対する等水深図であり、上流一様部の水深 h_0 で除した無次元水深 h/h_0 で表している。図の $h/h_0=1.0$ の部分と縦軸とのなす角は ϕ_0 に等しく、 $Fr_0=1$ では $\phi_0=0$ において $h/h_0=1.0$ となるが、 $Fr_0=2$ 、 $Fr_0=4$ では ϕ_0 の増加とともに急拡部に入射した後も上流一様水深 h_0 を $\phi = \phi_0$ まで維持し続けていることがわかる。以上のことから急拡部を過ぎる流れは上流一様フルド Fr_0 数の増大とともに回り込み難くなっていることがわかる。

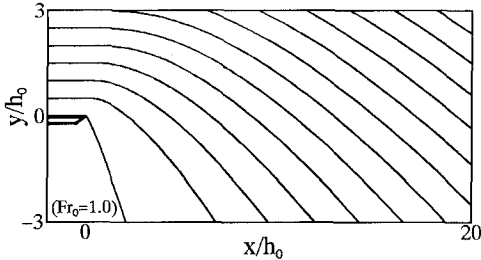


図2 急拡部における流線図（平面図）

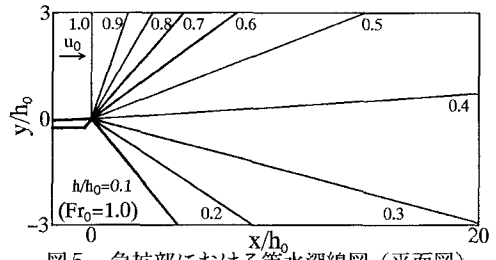


図5 急拡部における等水深線図（平面図）

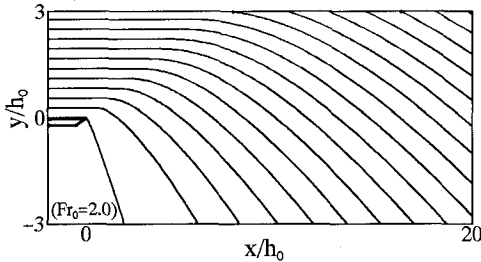


図3 射流急拡部における流線図（平面図）

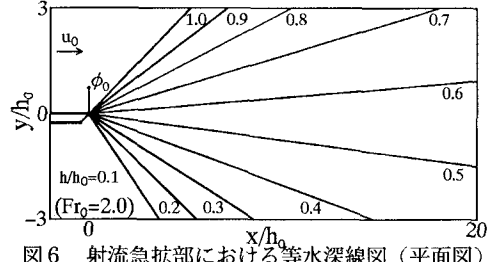


図6 射流急拡部における等水深線図（平面図）

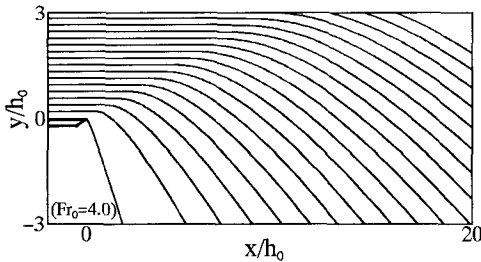


図4 射流急拡部における流線図（平面図）

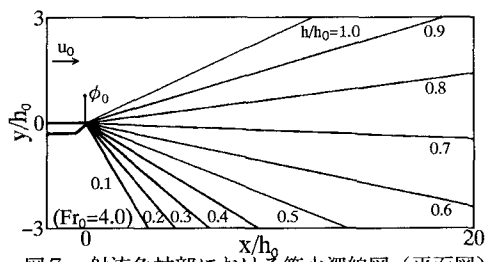


図7 射流急拡部における等水深線図（平面図）

4. まとめ

射流急拡部を過ぎる流れについて、(1)流れは $\phi = 156^\circ$ 以上の角について回り込むことができない。(2) $0 \leq \phi \leq 156^\circ$ までの範囲内で任意の上流一様フルド Fr_0 を持つ外角を回る流れは上流一様フルド Fr_0 によって決定される $\phi = \phi_0$ まで上流水深 h_0 に等しく、その後 ϕ 方向に回り込むが、 Fr_0 の増大とともに流速は大となり、流れは回り込み難くなっていることがわかる。今後は射流急拡部を過ぎる流れを水路実験等で確認し、急流河川における洪水時の氾濫特性について検証していきたいと考えている。

<参考文献>

- 1) Hunter Rouse, B. V. Bhoota, En-Yun Hsu: Proceedings A. S. C. E Nov. 1949, pp1369-1385
- 2) 丹生慶四郎: 流体物理学, 共立全書, pp80-82, 1978