II－166

開水路不定流の計算精度に関する研究

山梨大学大学院　学生員　○田内　誠一
山梨大学工学部　正　員　　荻原　能男
山梨大学工学部　正　員　　宮沢　直季

1．はじめに　開水路の流れは一般河川や運河などに見られるものであるが、その水路の有する境界特性が複雑でありかつ不定流を解析するには非線形問題として解析が困難とされている。そこで本研究では一般に云われているような線形化により解析をすすめ、流れにおける物理量が定常値に対して変動量の小さいものとして、更にラプラス変換を利用することにより一般解を求め、その特性から運動方程式の各項の省略に伴う計算誤差について考察し、実用性について検討した。

2．不定流の一般解　開水路不定流の式は多くの仮定によって成立するものであり、(1)流れは急変しない。(2)斜面あるいは水路の勾配は極めて小さい。(3)流線はほぼ平行で圧力は静水圧力分布とする。(4)抵抗則はManningの公式を準用する。(5)空気混入流、土砂流は無視できる。(6)水の圧縮性は無視できる。(7)運動量補正係数αおよびβは1とするといった仮定を用いて解析をすすめ運動方程式の各項が実用上どれほど意味があるか論ずるために、時間的加速度項にN1、移流項にN2、圧力項にN3の係数を乗じ、水理学的物理量を定常量と変動量の和（例：$H=H_0+h$）に分けることにより線形化した。更に解析上物理量を一般的にするため流速、水深、水路幅、河床高、水路長、時間の無次元化（ﾍﾞｸﾄﾙ記号で示す）を行い、次の無次元量により変形すると不定流の基礎方程式は式①、②のように定まった。

$$\gamma=\frac{U_0T_0}{H_0},\quad \mu=\frac{n^2H_0}{R_0^{\frac{4}{3}}}g,\quad \delta=\frac{R_0}{B_0}=\frac{H_0}{B_0+2H_0},\quad m=\frac{R_0}{H_0}=\frac{B_0}{B_0+2H_0},\quad f=\frac{U_0}{\sqrt{gH_0}}$$

$$N_1\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{t}}+N_2\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}+N_3\frac{1}{f^2}\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{x}}=-\frac{1}{f^2}\frac{\partial\overline{z}}{\partial\overline{x}}-\mu+\frac{8}{3}\mu\delta\overline{b}+\frac{4}{3}\mu m\overline{h}-2\mu\overline{u}\quad\cdots①$$

$$\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{t}}+\gamma\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}+\gamma\frac{\partial\overline{b}}{\partial\overline{x}}+\gamma\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{x}}=0\quad\cdots②$$

ただし$\overline{u}=\frac{u}{U_0}$、$\overline{h}=\frac{h}{H_0}$、$\overline{b}=\frac{b}{B_0}$、$\overline{z}=\frac{z}{H_0}$、$\overline{x}=\frac{x}{H_0}$、$\overline{t}=\frac{t}{T_0}$

次に水深の一般解を求めるため式①、②から開水路を幅広長方形断面と考え水路幅は一定として、初期条件に$\overline{u}(\overline{x},0)=0$、$\overline{h}(\overline{x},0)=0$ 境界条件に$\overline{h}(0,\overline{t})=f(\overline{t})$、$\overline{h}(\xi,\overline{t})=g(\overline{t})$ を採用し、$\overline{t}$ についてﾗﾌﾟﾗｽ変換をとると像関数を大文字で表すとし、変換のﾊﾟﾗﾒｰﾀをsで表すと式③のように定めることができた。

$$\overline{H}=F(s)e^{\lambda_1x}\left(1+e^{(\lambda_1-\lambda_2)\xi}+e^{2(\lambda_1-\lambda_2)\xi}+\cdots\cdots\right)$$
$$-F(s)e^{\lambda_2x}\left(e^{(\lambda_1-\lambda_2)\xi}+e^{2(\lambda_1-\lambda_2)\xi}+\cdots\cdots\right)$$
$$+G(s)\left(e^{\lambda_2(x-\xi)}-e^{\lambda_1x-\lambda_2\xi}\right)\left(1+e^{(\lambda_1-\lambda_2)\xi}+e^{2(\lambda_1-\lambda_2)\xi}\cdots\cdots\right)\cdots③$$

ただし$\lambda_1=\frac{1}{2}\left(as+b+\sqrt{(a^2+4c)s^2+(2ab+4d)s+b^2}\right)$

$$\lambda_2=\frac{1}{2}\left(as+b-\sqrt{(a^2+4c)s^2+(2ab+4d)s+b^2}\right)$$

$$a=\frac{N_1+N_2}{\gamma\left(\frac{N_3}{f^2}-N_2\right)}\qquad b=\frac{10\mu}{3\left(\frac{N_3}{f^2}-N_2\right)}\qquad c=\frac{N_1}{\gamma^2\left(\frac{N_3}{f^2}-N_2\right)}\qquad d=\frac{2\mu}{\gamma\left(\frac{N_3}{f^2}-N_2\right)}$$

3．計算誤差　前節で求めたﾗﾌﾟﾗｽ変換の解を用いてﾗﾌﾟﾗｽ変換の第一移動法則から流れの波動特性を考慮し、波の流速部分、波速部分そして伝播に伴う増副、減衰部分の各部分を計算する際、運動方程式各項の省略に伴う計算誤差について項を省略しない場合に対する精度で表し考察した結果を以下に示す。

1)流速部分（$=\rho$）の計算精度について係数N_1、N_2、$N_3=1.0$（$=\rho_0$）の場合に対する誤差表示に書き直すと式④となる。

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}=\frac{1}{2}\left(\frac{N_2}{N_1}-1\right)\quad\cdots④$$

この式④について縦軸に誤差表示、横軸にN2/N1として両対数グラフ図－１に示した結果、流速部分を計算する場合ﾌﾙｰﾄﾞ数および圧力項には関係なく、移流項を省略してもさほど計算誤差は生じない。また時間的加速度項を省略すると計算精度に影響を与えることがわかった。

2)波速部分(＝σ)の計算精度について係数N_1、N_2、N_3=1.0(＝σ_0)の場合に対する誤差表示に書き直すと式⑤となる。

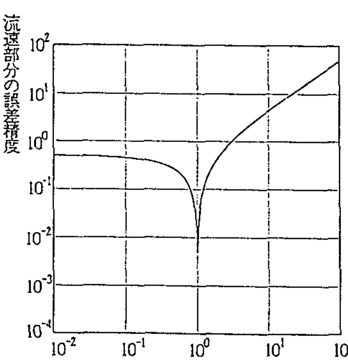
$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma}=\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma_0}=\frac{1+\frac{N_2}{N_1}}{2}\sqrt{\left(1-\frac{4\frac{N_2}{N_1}}{\left(1+\frac{N_2}{N_1}\right)^2}\right)f^2+\frac{4\frac{N_2}{N_1}\frac{N_3}{N_1}}{\left(1+\frac{N_2}{N_1}\right)^2}}-1\quad\cdots⑤$$

この式⑤はﾌﾙｰﾄﾞ数やN2/N1、N3/N1から成る式であり特定の場合としてﾌﾙｰﾄﾞ数が1.0の時のｸﾞﾗﾌを同様に図－２に示したが、ﾌﾙｰﾄﾞ数やN1、N2、N3を任意にとった結果、波速部分を計算する場合フルード数により計算精度は大きく左右さ、移流項を省略すると常流、すなわちﾌﾙｰﾄﾞ数が 1.0 以下の時はさほど計算誤差は生じないが、射流すなわちﾌﾙｰﾄﾞ数が 1.0 以上の時は計算誤差は大きくなる。また圧力項を省略すると計算誤差は精度で 1.0 程度になり、時間的加速度項を省略すると計算精度に大きく影響を与えることがわかった。

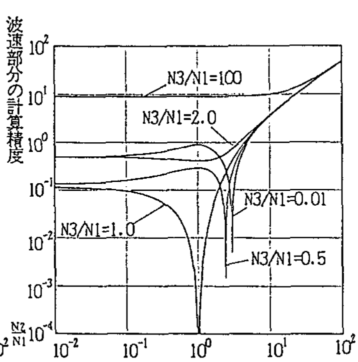
3)波の伝播にともなう増副部分(＝ω)の計算精度について係数N_1、N_2、N_3=1.0(＝ω_0)の場合に対する誤差表示に書き直すと同様に式⑥で定まる。

$$\frac{\Delta\omega}{\omega}=\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}=\frac{\left(\frac{1}{f^2}-1\right)}{\left(\frac{N_3}{f^2}-N_2\right)\left(1+\frac{2}{5}f^2+\frac{3}{5}f\right)}\left\{1+\frac{1+\frac{6}{5}\frac{\left(\frac{N_3}{f^2}-N_2\right)}{(N_1+N_2)^2}}{f\sqrt{\left(1-\frac{4N_1N_2}{(N_1+N_2)^2}\right)f^2+\frac{4N_1N_3}{(N_1+N_2)^2}}}\right\}-1\quad\cdots⑥$$

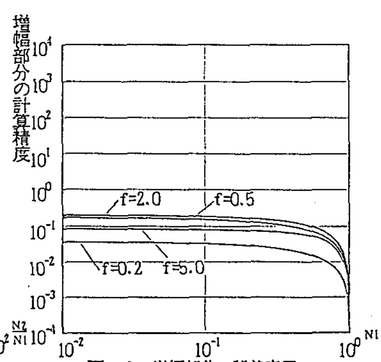
この式⑥についても2)と同様、特定の場合として縦軸に増幅部分の誤差精度、横軸をN_2、N_3=1.0とした場合のN_1として図－３に示し、考察した結果、伝播にともなう減衰部分についても同様な結果であった。すなわち波の伝播に伴う増幅、減衰部分を計算する場合、不定流が限界流すなわちﾌﾙｰﾄﾞ数が 1.0 の時は、計算誤差は生じず、ﾌﾙｰﾄﾞ数により計算精度は変化するが、計算誤差に最も影響を与えるのが移流項で、次に圧力項であり、時間的加速度項は省略してもさほど影響を与えないことがわかった。



図－１　流速部分の誤差表示



図－２　波速部分の誤差表示



図－３　増幅部分の誤差表示

４．おわりに　以上の研究により開水路不定流方程式を微少変動理論により線形化し、更にﾗﾌﾟﾗｽ変換により一般解を求め、流速、波速、波の増幅の特性に時間的加速度項、移流項、圧力項がどう関係するか明確にした。最後に今回の研究では水深の一般解により解析をすすめたが、流速の一般解についての同様な結果がでることをつけくわえておく。

参考文献　荻原能男：不定流の一解析法（山梨大学工学部研究報告第11号、1960年12月　pp. 177～184）