II-63 KINEMATIC WAVEモデルの確率応答特性

北海道大学工学部　学生員　竹本　晃
日本国土開発（株）　正　員　工藤睦信
北海道大学工学部　正　員　藤田睦博

1 はじめに

降雨流出系において、入力である降雨量が不規則過程であるならば、出力である流出量も不規則過程となる。本論文は、降雨量の確率特性が既知のときに、KINEMATIC WAVEモデルにおける流出量の1～4次モーメントを理論的に誘導し、その確率分布を知るための手法について考える。

2 基礎理論

KINEMATIC WAVEモデルは、次式のように表される。

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=r \qquad 0\leqq x\leqq l \ (\text{斜面長}) \tag{2.1}$$

$$q=\varepsilon h^{m} \tag{2.2}$$

h ：水深（mm）
q ：流出量（mm²/hr）
r ：降雨強度（mm/hr）

降雨量r(t) が不規則関数なら、流出量qもまた不規則関数となる。q,r を平均値と平均からの偏差で表す。

$$q=\overline{q}+\widetilde{q} \qquad E(\widetilde{q})=0 \tag{2.3}$$

$$r=\overline{r}+\widetilde{r} \qquad E(\widetilde{r})=0 \tag{2.4}$$

非線形系（m≠1）において、Bras[1)]らは、ベキ乗型の確率変数$q^{\frac{1}{m}}$ に関して次式を提案している。

$$q^{\frac{1}{m}}=\alpha\overline{q}+\beta\widetilde{q} \tag{2.5}$$

$$\alpha=\overline{q}^{\frac{1}{m}-1}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\frac{E(\widetilde{q}^{2})}{\overline{q}^{2}}+\frac{1}{6}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)\frac{E(\widetilde{q}^{3})}{\overline{q}^{3}}+\cdots\right\} \tag{2.6}$$

$$\beta=\frac{\overline{q}^{\frac{1}{m}}}{E(\widetilde{q}^{2})}\left\{\frac{1}{m}\frac{E(\widetilde{q}^{2})}{\overline{q}}+\frac{1}{2}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\frac{E(\widetilde{q}^{3})}{\overline{q}^{2}}+\frac{1}{6}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)\frac{E(\widetilde{q}^{4})}{\overline{q}^{3}}+\cdots\right\} \tag{2.7}$$

式（2.1),（2.2)をまとめて式（2.5)を用いて、流出量の1～4次モーメントを求める式（2.8)～（2.11)を得る。

平均値　：
$$\frac{\partial\alpha\overline{q}}{\partial t}+\varepsilon^{\frac{1}{m}}\frac{\partial\overline{q}}{\partial x}=\varepsilon^{\frac{1}{m}}\overline{r} \tag{2.8}$$

分散　：
$$\beta\frac{\partial\sigma_{q}^{2}}{\partial t}+\varepsilon^{\frac{1}{m}}\frac{\partial\sigma_{q}^{2}}{\partial x}=\frac{\varepsilon^{\frac{1}{m}}}{\beta}C\sigma_{r}^{2}-2\frac{\partial\beta}{\partial t}\sigma_{q}^{2} \tag{2.9}$$

3次モーメント：
$$\beta\frac{\partial\mu_{q3}}{\partial t}+\varepsilon^{\frac{1}{m}}\frac{\partial\mu_{q3}}{\partial x}=\varepsilon^{\frac{3}{m}}C^{2}\frac{\mu_{r3}}{\beta^{2}}-3\frac{\partial\beta}{\partial t}\mu_{q3} \tag{2.10}$$

4次モーメント：
$$\beta\frac{\partial\mu_{q4}}{\partial t}+\varepsilon^{\frac{1}{m}}\frac{\partial\mu_{q4}}{\partial x}=\varepsilon^{\frac{4}{m}}C^{3}\frac{(\mu_{r3}-3\sigma_{r}^{4})}{\beta^{3}}+6\varepsilon^{\frac{2}{m}}C\frac{\sigma_{r}^{2}}{\beta}Z-4\frac{\partial\beta}{\partial t}\mu_{q4} \tag{2.11}$$

3 シミュレーション法による検討

次に、式（2.8)～（2.11)の適合性を検討する。式（2.1),（2.2)は、l,ε,mのパラメータを含んでおり、藤田[2)]と同様に基礎式を無次元化して次式を得る。

$$\frac{\partial H}{\partial T}+\frac{\partial Q}{\partial X}=R \qquad 0\leqq X\leqq 1 \tag{3.1}$$

$$Q=H^{m} \tag{3.2}$$

無次元化すると、パラメータの数が1個少なく、かつ、無次元距離 X が、$0 \leq X \leq 1$ なので m の値のみによってその特性が記述される。また、降雨量の実測値は、離散化された量である。しかし、前節で用いた降雨量は、連続的な量である。そこで、式(3.1)～(3.4)を用いて離散化しなければならない。その操作を経た統計量を R_d で表し、無次元化した量を大文字で表す。

平均値　：$\overline{R}_d = \overline{R}$　(3.3)

分散　：$\sigma_{Rd}^2 = \dfrac{1}{\Delta T}\sigma_R^2$　(3.4)

3次モーメント：$\mu_{Rd3} = \dfrac{1}{\Delta T^2}\mu_{R3}$　(3.5)

4次モーメント：$\mu_{Rd4} = \dfrac{1}{\Delta T^3}(\mu_{R4} - \sigma_R^4) - \dfrac{1}{\Delta T^2}3\sigma_R^4$　(3.6)

式(3.3)～(3.6)で離散化された降雨統計量を用いて、シミュレーション法から得られる流出量と、式(2.8)～(2.11)で得られる理論解を比較した結果が図3-1,2,3であり、実線がシミュレーション解で、破線が理論解である。　計算条件は、降雨強度は　指数分布に従うとし、$\overline{R}=5$，$\sigma_R^2=25$，$\Delta T=0.01$，標本数1000　組である。この場合、流出量の分布型は、図3-4に示すとおり、$T=T_c$（到達時間）までは　ガンマ分布上を推移し、線形系($m=1$)においては　定常部においてもガンマ分布上にあり、非線形系($m \neq 1$)においてはBeta(Single Peak)分布上にある。

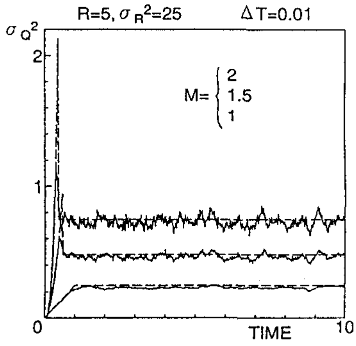

図3-1

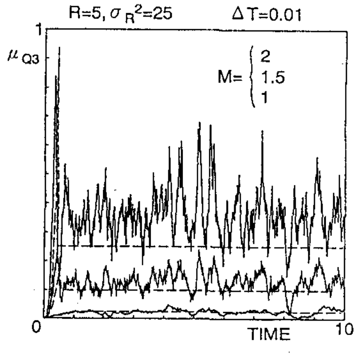

図3-2

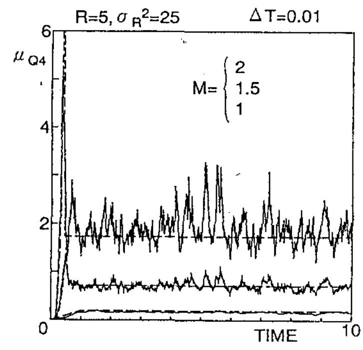

図3-3

4　まとめ

KINEMATIC WAVEモデルにおいて、1～4次モーメントを理論的に求める手法における確率応答特性について述べた。また、降雨強度が指数分布に従う場合、流出量の分布型は、到達時間まではガンマ分布であり、それ以降は非線形系が強まれば、ガンマ分布上から離れることがわかった。

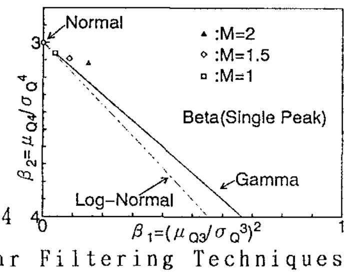

図3-4

参考文献

1)Bras,R.I and Georgakakos,K.P:Real Time Nonlinear Filtering Techniques in Storeamflow Forecastings A Statistical Linearization Approach, Third International Symposium on Stochastic Hydraulics,pp.95～105,1980

2)藤田睦博：斜面長の変動を考慮した貯留関数法に関する研究，土木学会論文報告集，No314,1981

3)藤田睦博，中尾隆志，篠原伸和：貯留型流出モデルの高次モーメントの導出について，水工学論文集，第37巻，pp.99～104,1993