I－776　　数値ラプラス変換を用いた弾性波動解析のための無限要素

長岡技術科学大学　正会員　岩崎英治
長岡技術科学大学　正会員　林　　正

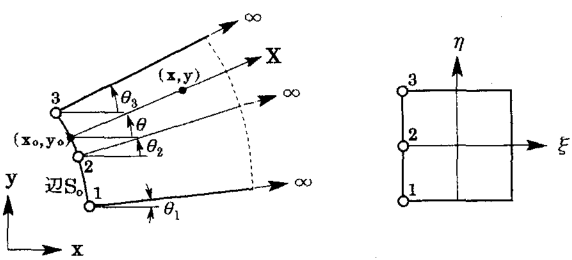
1.　まえがき

構造物に落石等が落下したときの局所的な過渡応答挙動や、構造物と地盤の連成効果を考慮した地震動の動的解析等を、汎用性に優れた有限要素法により行う場合には、無限領域を有限領域で置き換えるために無反射境界あるいは無限境界と呼ばれる境界処理が問題になる。このため、粘性境界による方法や、重ね合わせにより反射波を消去するような種々の仮想境界による解を用いる方法などが開発されている。しかし、前者は精度に問題があり、後者は正確であるが、多数の波動が反射する場合には多くの解の重ね合わせが必要である。そこで、本報告は、文献1)に示した解析法を用いて無限領域を含んだ問題を解析するための無限要素を開発し、その有効性を示す。

2.　無限要素

図−1に示しているような無限要素を、$-1\sim+1$の範囲の正規座標で表現するための関係式を誘導する。

無限に伸びている方向をX軸とし、この軸とx軸との間の角をθとする。また、辺s_o上にX軸の原点をおき、この点の(x,y)座標値を(x_o,y_o)とする。



図−1　無限要素 ($r=3$ の場合)

角θと辺上の座標値を、辺上の節点での値$\theta_i, x_{o_i}, y_{o_i}$から、次式のように表す。

$$\theta(\eta)=\sum_{i=1}^{r}\tilde{N}_i(\eta)\theta_i \quad , \quad x_o(\eta)=\sum_{i=1}^{r}\tilde{N}_i(\eta)x_{o_i} \quad , \quad y_o(\eta)=\sum_{i=1}^{r}\tilde{N}_i(\eta)y_{o_i} \quad \cdots\cdots (1)$$

ここに、$\tilde{N}_i$は辺の形状を表す形状関数、rは辺の形状を表現するために用いる節点数である。

X座標から、次のような正規座標ξを定義する。

$$\xi=1-2e^{-\beta X} \quad \cdots\cdots (2)$$

この式によりX座標の無限区間$(0,\infty)$が、ξ座標の有限区間$(-1,1)$に対応付けられる。この式に含まれるパラメータβには、次のような式を用いる。

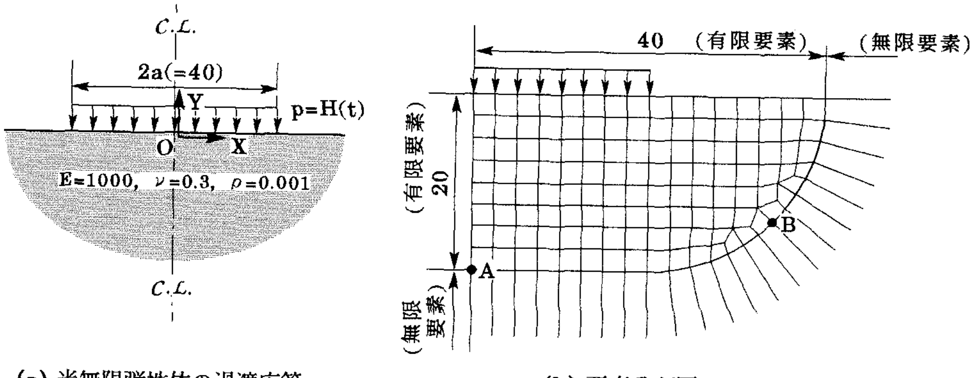
$$\beta=\sqrt{\frac{\rho s^2}{\lambda+2\mu}} \quad , \quad \sqrt{\frac{\rho s^2}{\mu}} \quad \cdots\cdots (3)$$

ここに、ρは弾性体の密度、λとμはラメの定数であり、sは時間についてラプラス変換を行ったときの変換パラメータである。

これらより、座標(x,y)と(ξ,η)の微分関係は、次式のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos\theta}{\beta(1-\xi)} & \dfrac{\sin\theta}{\beta(1-\xi)} \\ \dfrac{dx_o}{d\eta}+\dfrac{1}{\beta}\log(\dfrac{1-\xi}{2})\dfrac{d\theta}{d\eta}\sin\theta & \dfrac{dy_o}{d\eta}-\dfrac{1}{\beta}\log(\dfrac{1-\xi}{2})\dfrac{d\theta}{d\eta}\cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots (4)$$

上式の関係を用いることにより、無限領域が有限領域に写像され、有限要素方程式の誘導と同様の手順により無限要素の方程式が得られる。



(a) 半無限弾性体の過渡応答　　(b) 要素分割図

図−2　数 値 計 算 例

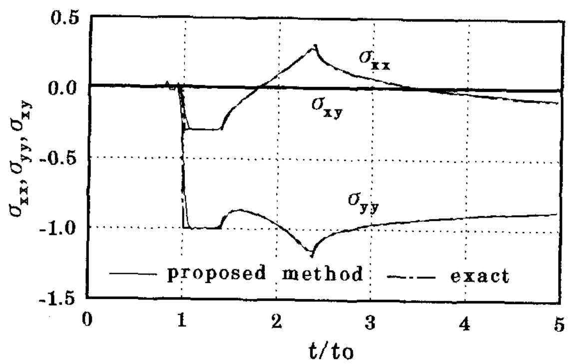
3. 数値計算例

本報告の無限要素の有効性を確認するために、図−2(a) のような半無限弾性体に幅 $2a(=40)$ の範囲に分布した荷重 $p=\mathrm{H}(t)$ が作用したときの応力波伝播挙動を解析する。ここに、$\mathrm{H}(t)$ は単位ステップ関数である。また、半無限弾性体の弾性係数、ポアソン比と密度はそれぞれ、$E=1000, \nu=0.3, \rho=0.001$ であり、平面応力状態を仮定する。

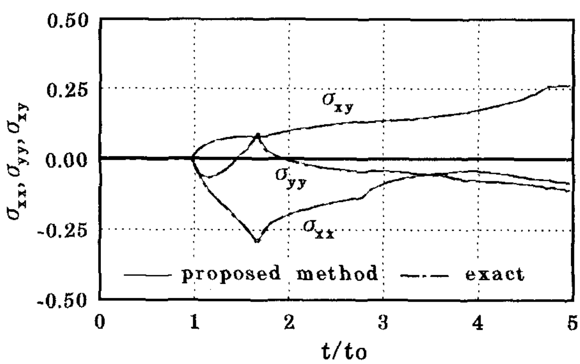
対称性を考慮して、図−2(b) に示しているように、荷重作用範囲から長さ 20 の領域を有限要素により 118 分割し、残りの無限に広がっている領域を無限要素により 22 分割している。なお、有限要素には 25 節点要素を用い、無限要素についても、無限要素内の変位を表すために一要素 25 節点を用いている。

また、解析時間は縦波が距離 100 を伝播する時間 $t_o=0.09539$、時間分割数を 128 とし、数値逆変換を行うためのパラメータは、文献 1) に示した計算例と同じである。

図−3(a),(b) に、図−2(b) 中の点 A と B の応力応答を示している。これらの図で横軸は、縦波が有限要素分割された領域と無限要素分割された領域の境界まで伝播する時間で正規化している。



(a) 点 A(0,-20) の応力応答



(b) 点 B(34.1,-14.1) の応力応答

図−3　応力応答

これらの図より、本方法による結果は不連続に変化する部分を除いて正解に良く一致している。

参考文献

1) 岩崎英治・林　正：数値ラプラス変換を用いた衝撃問題の数値解法，第 2 回落石等による衝撃問題に関するシンポジウム講演論文集，1993.