Ｉ－760　逆解析の効率的な解法の提案

東電設計（株）　正会員　吉田郁政　　正会員　豊田耕一

１．まえがき　確率論（最尤法）に基づく逆解析では、式(1)の目的関数の最小化問題を解く必要がある。共役勾配法、DFP法、Marquardt法など多数の方法で解くことができるが、その効率について比較する場合収束回数に注目することが多い。しかし、実用上問題となるのは収束回数よりも全体の計算時間である。そこで、計算時間に注目した議論を行い、効率的な計算アルゴリズムの提案を行う。

２．確率論に基づく逆解析[1]　逆解析の目的関数を最尤法に基づいて誘導すると、次式が求められる。

$$J=\{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_o)^T M^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_o)+(\mathbf{z}-H(\mathbf{x}))^T R^{-1}(\mathbf{z}-H(\mathbf{x}))\}/2 \qquad (1)$$

ここに、$\mathbf{x}$：未知量ベクトル、$\mathbf{z}$：観測量ベクトル、M：事前の$\mathbf{x}$の共分散行列、$\mathbf{x}_o$：事前の$\mathbf{x}$の平均値、

R：観測量誤差の共分散行列、H（$\mathbf{x}$）：観測量の計算推定値

目的関数Ｊの最小化問題にMarquardt法[2]を適用すると次式が得られる。

$$\mathbf{x}_{i+1}=\mathbf{x}_i+P_{xi}\{H_{xi}^T R^{-1}(\mathbf{z}-H(\mathbf{x}_i))+M^{-1}(\mathbf{x}_o-\mathbf{x}_i)\} \qquad (2)$$

$$P_{xi}=(M^{-1}+H_{xi}^T R^{-1}H_{xi}+\lambda D)^{-1} \qquad (3)$$

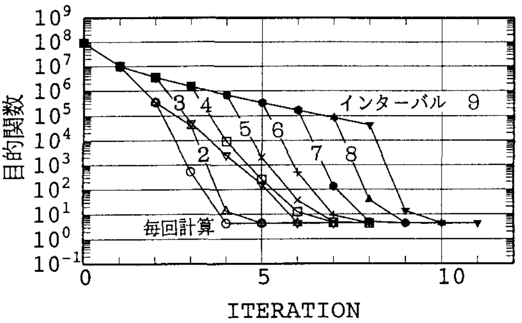
ここで、H_{xi}：ヤコビアン行列（$\mathbf{x}_i$における$\partial H/\partial \mathbf{x}$）、D=diag（$H_{xi}^T R^{-1}H_{xi}$）、λは安定化のためのパラメタ、diag（A）は行列Aの対角行列だけからなる行列を意味する。

３．効率的な逆解析手法　逆解析における計算時間の大部分はヤコビアン行列の計算に費やされるので、これを毎回計算せずに数回に１回計算することを考えた。簡単なＦＥＭモデルを用いた物性値推定問題を対象として、毎回ヤコビアン行列を計算する場合から計算のインターバル９回の場合まで、計９ケースの逆解析を行った。各ケースの目的関数の収束過程を図－１に示す。ヤコビアン行列を計算したステップで目的関数が急激に減少している。この計算例ではヤコビアン行列の計算を行わないステップでは最後に計算したヤコビアン行列をそのまま用いているが、収束性を改善するため次式のBroydenによるヤコビアン行列の修正[2]を行うことを考えた。

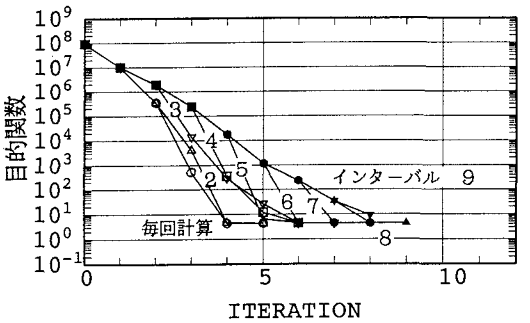
$$H_{xi+1} = H_{xi} + (\triangle \mathbf{z} - H_{xi}\triangle \mathbf{x})\triangle \mathbf{x}^T/(\triangle \mathbf{x}^T\triangle \mathbf{x}) \qquad (4)$$

ここで、$\triangle \mathbf{z} = H(\mathbf{x}_{i+1}) - H(\mathbf{x}_i)$、　$\triangle \mathbf{x} = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i$

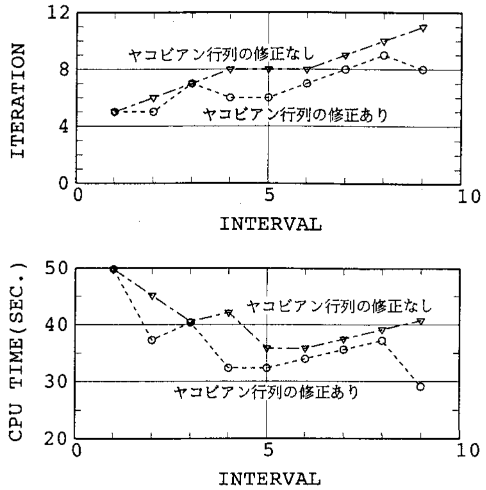
修正を行った場合の収束過程を図－２に示す。全体的に収束性が改善されていることがわかる。次に各ケースの計算時間と収束回数の比較を図－３に示す。ヤコビアン行列の計算インターバルが大きくなると収束回数は増えるものの全体の計算時間は逆に減少する傾向にある。また、ヤコビアン行列の修正を行わない場合に比べ修正を行った場合は収束回数も計算時間も短縮されていることがわかる。この計算例ではヤコビアン行列の計算を行わない場合も目的関数が順調に減少しているが、問題によっては減少しない場合もあるので



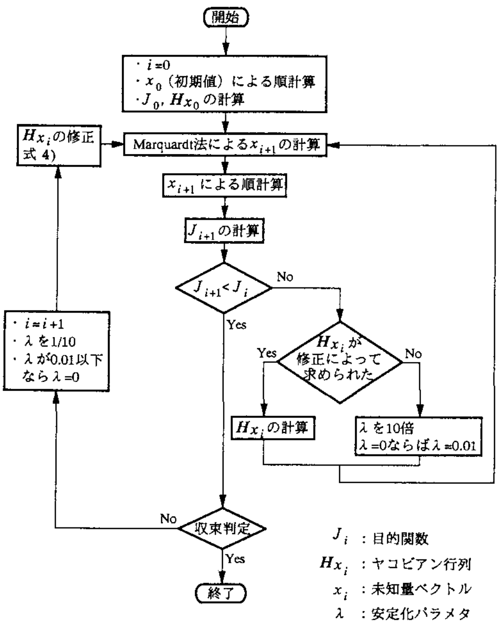
図－１　ヤコビアン行列の計算インターバルと収束過程（ヤコビアン行列の修正なし）



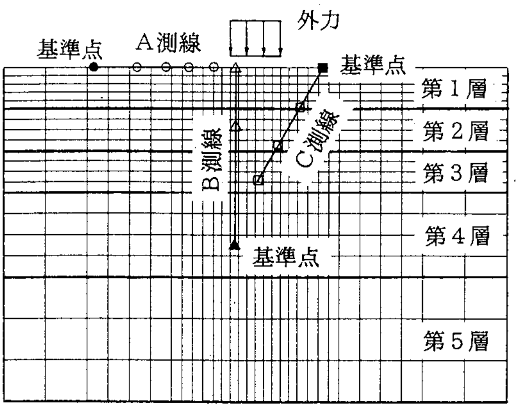
図－２　ヤコビアン行列の計算インターバルと収束過程（ヤコビアン行列の修正あり）



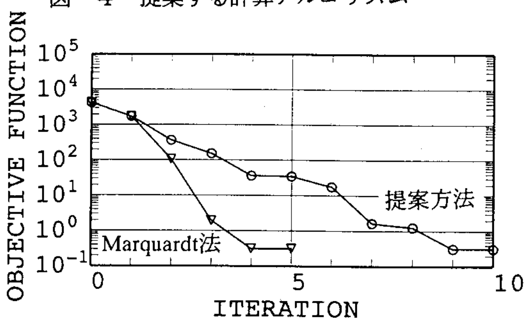
図－3　ヤコビアン行列の計算インターバルと計算効率



図－4　提案する計算アルゴリズム



図－5　例題のFEMモデル



図－6　目的関数の収束過程

注意を要する。また、何回に１回ヤコビアン行列の計算を行うのが効率的かも問題によって異なるので一概には決めることができない。そこで、図－４に示す計算アルゴリズムを考案した。目的関数が増加したときのみヤコビアン行列の計算を行い、それでも目的関数が減少しない場合は安定化パラメタλを大きくすることによって目的関数を減少させる。

４．数値計算例　図－５に示すモデルの第1,2,3層のヤング率とポアソン比を未知量とする逆解析を行った。観測量はA,B,Cの３測線を考え、各観測点と基準点の相対変位が得られているとした。従来のMarquardt法と提案手法で計算を行った場合の目的関数の収束過程を図－６に示す。提案方法は従来の方法に比べ２倍の収束回数を必要としているが、計算時間を比べると逆に約半分になっている。未知量や観測量の組み合わせを変えて、１５ケースの逆解析を行い計算時間の比較を行ったところ、全てのケースで計算時間の短縮が行われ、提案手法の有効性が確認された。しかし、その短縮の程度は問題によって異なり、最も効率が良い場合で1/3程度、最も悪い場合で約1.0、つまりほぼ同程度であった。

参考文献

1)吉田、他：確率論に基づく逆解析手法の基礎研究、土木学会論文集、第483号、pp.61-68、1994
2)中川、他：最小二乗法による実験データ解析、東京大学出版会、1982