I－719　ノイズを伴うUniversal Cokrigingの提案

鳥取大学大学院　学　大霜正樹
鳥取大学工学部　正　野田　茂
大成建設(株)土木設計第１部　正　田口洋輔
早稲田大学理工学部　正　浜田正則

1. まえがき

我々は、事前情報に基づいてモデル化を行ったり、観測データなどの事後の知見によって、モデルを更新したりする。その際、観測データがノイズに汚染されていると、更新の効果は低くなる。この場合には、単一の物理量に注目するのではなく、相互に関連した複数の異なる物理量を用いれば、同定の精度がよくなるであろう。そこで、本研究では、ノイズを伴う確率場において、複数の物性値が各観測点で与えられた条件下で、未観測点の代表的物性値やその精度を評価する方法を提案する。さらに、この方法を1964年新潟地震時の液状化に伴って発生した地盤の側方流動量の補間に適用した事例を示す。

2. 前提条件

観測データから、物性値が正規分布するのかあるいは対数正規分布するのかを調べる。その際、取り扱うデータの観測ノイズについても検討する。次に、観測データを用いて、各物性値の平均値や共分散(自己、相互)のモデル化を行う。これにより、Cokrigingの定式化が可能になる。

ここでは、確率場において、平均値を未知、共分散を既知と仮定し、複数の物性値を選ぶ。平均値は、未知パラメーターと座標関数(既知)の線形結合によって表す。共分散は平均値に依存する。しかし、平均値は確定的に与えられない。そのため、平均値と共分散を規定するパラメーターは、最尤法などを用いて、観測データに基づき、非線形反復計算によって推定せざるを得ない。このようにすると、共分散はモデル化できる。

Universal Cokrigingを行う際、全ての観測データを取り扱うと、計算量は膨大になる。そのため、推定すべき未観測点の周辺において、空間的相関性の高いデータのみを用いる必要がある。Cokrigingに当たり、推定誤差分散に含まれるラグランジェ乗数の項(式(5)の右辺第3項目）を最小化するように、未観測点は選べばよい。

3. 正規確率場における同定

(1) 問題の設定

ここではk個の物性値(正規確率場)を考える。未観測点S_0での物性値$Z_1(S_0)$を推定するために、以下ではその基本式のみを示す。

まず、観測データ、確率場の特性と観測ノイズを考慮に入れて、補間式の誘導を行う。その際、観測データ$\underline{Z}_i(S_j)$ $(i=1\sim n, j=1\sim N_i$、観測点数$N_i)$に重み係数λ_{ij}をかけて、未観測点の物性値を推定する。なお、不偏性を満足するように、推定誤差分散の最小化を図らなければならない。

空間地点Sでの平均値は、未知パラメーターβ_kおよび既知の座標関数$f_k(S)$ $(k=1\sim p$、次数$p)$を用いて、次式で定義する。

$$m_i(S) \;=\; \sum_{k=1}^{p_i}\beta_{ki}f_{ki}(S) \qquad (i=1\sim n) \tag{1}$$

ノイズがないとき、物性値$Z_i(S_j)$と$Z_{i'}(S_{j'})$の共分散は$C_{ii'}(S_j,S_{j'})$で表す。物性値$Z_i(S_j)$の観測ノイズ$\epsilon_i(S_j)$は、平均値が0で、地点ごとにお互いに独立であり、同一地点S_jで、分散$\sigma^2_{\epsilon_i}(S_j)$を有する。また、観測ノイズは各物性値と無相関であると仮定する。

(2) 拡張された評価関数

上記の条件を満たすように、ラグランジェ乗数μ_{ki} $(k=1\sim p_i, i=1\sim n)$を導入すると、拡張された評価関数Δは次のようになる。これを最小化することが必要である。

$$E\left(Z_1(S_0)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i}\lambda_{ij}Z_i(S_j)\right)^2-2\sum_{k=1}^{p_1}\mu_{k1}\left(\sum_{j=1}^{N_1}\lambda_{1j}f_{k1}(S_j)-f_{k1}(S_0)\right)-2\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\mu_{ki}\sum_{j=1}^{k_i}\lambda_{ij}f_{ki}(S_j) \tag{2}$$

ここで、$Z_1(S_0)$は1番目の物性値の推定点S_0での確率量を、$Z_i(S_j)$はi $(i=1\sim n)$番目の物性値の観測点S_j $(j=1\sim N_i)$での観率量を意味する。

(3) 不偏推定かつ最小誤差分散推定を与えるための条件式

式(2)を重み係数λ_{ij} $(i=1\sim n, j=1\sim N_i)$とラグランジェ乗数μ_{ki} $(i=1\sim n, k=1\sim p_i)$で偏微分して0とおくと、式(2)の最小化条件は次式で表せる。

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{i'=1}^{n}\sum_{j'=1}^{N_{i'}}\lambda_{i'j'}\left(C_{ii'}(S_j,S_{j'})+\delta_{ii'}\delta_{jj'}\sigma^2_{\epsilon_i}(S_j)\right)-\sum_{k=1}^{p_i}\mu_{ki}f_{ki}(S_j)=C_{1i}(S_0,S_j)\ ;\ i=1\sim n,\ j=1\sim N_i \\
\displaystyle\sum_{j=1}^{N_1}\lambda_{1j}f_{k1}(S_j)=f_{k1}(S_0)\ ;\ k=1\sim p_1 \\
\displaystyle\sum_{j=1}^{N_i}\lambda_{ij}f_{ki}(S_j)=0\ ;\ i=2\sim n,\ k=1\sim p_i
\end{array}\right\} \tag{3}$$

ここに、δ_{ij}はクロネッカーデルタ記号を示す。

(4) 最適推定値と推定誤差分散

式 (3) より、重み係数とラグランジェ乗数を求めると、正規確率場での最適推定値は、観測データ$\underline{Z}_i(S_j)$を用いて、

$$\widehat{Z}_{K_1}(S_0) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i}\lambda_{ij}\underline{Z}_i(S_j) \tag{4}$$

で表せる。一方、推定誤差分散は次のようになる。

$$\sigma^2_{K_1}(S_0) \;=\; C_{11}(S_0,S_0)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i}\lambda_{ij}C_{1i}(S_0,S_j)+\sum_{k=1}^{p_1}\mu_{k1}f_{k1}(S_0) \tag{5}$$

上式からわかるように、推定すべき点と観測点が一致しても、観測ノイズの存在により、最適推定値は観測データに一致しないし、推定誤差分散は 0 にならない。

4. 対数正規確率場における同定

対数正規確率量 $W_i(S_j)$ より、正規変量 $Z_i(S_j)$ $(=\ln W_i(S_j))$ を定義する。この $W_i(S_j)$ $(Z_i(S_j))$ の平均値 $m_{W_i}(S_j)$ $(m_{Z_i}(S_j))$ は未知、$Z_i(S_j)$ と $Z_{i'}(S_{j'})$ の共分散は $C_{ii'}(S_j,S_j)$ で表せるとする。なお、平均値 $m_{W_i}(S)$ は、式 (1) と同様に、未知パラメーターβ_{ki}と座標関数 $f_{ki}(S)$ によって、次式を満たす。

$$\ln m_{W_i}(S) \;=\; \sum_{k=1}^{p_i}\beta_{ki}f_{ki}(S) \qquad (i=1\sim n) \tag{6}$$

3. で述べた考え方と同様に補間式を誘導する。ただし、ノイズとしては正規性ホワイトノイズを仮定する。この場合、最適推定値は、観測量$\underline{W}_i(S_j)$ を用いると、式 (7) で、相対的な誤差分散は式 (8) で表せる。

$$\begin{aligned}\widehat{W}_{K_1}(S_0) \;=\; \exp\Bigg[&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i}\lambda_{ij}\ln\underline{W}_i(S_j)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}\left(C_{ii}(S_j,S_j)+\sigma^2_{\epsilon_i}(S_j)-C_{1i}(S_0,S_j)\right)\\&-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p_1}\mu_{k1}f_{k1}(S_0)\Bigg]\end{aligned} \tag{7}$$

$$\left(\frac{\sigma_{K_1}(S_0)}{m_{W_1}(S_0)}\right)^2 \;=\; e^{C_{11}(S_0,S_0)}\left\{1+e^{\sum_{k=1}^{p_1}\mu_{k1}f_{k1}(S_0)-\sigma^2_{K_{Z_1}}(S_0)}\left(e^{\sum_{k=0}^{p_1}\mu_{k1}f_{k1}(S_0)}-2\right)\right\} \tag{8}$$

ただし、$\sigma^2_{K_{Z_1}}(S_0)$ は式 (5) によって求められる。

式 (7) と (8) における重み係数λ_{ij}とラグランジェ乗数μ_{k1}は、式 (5) と同様の式によって、評価される。この場合、正規確率場と異なり、推定誤差分散$\sigma^2_{K_1}(S_0)$ は定量化されない。すなわち、式 (8) よりわかるように、平均値が未知なため、相対的な誤差分散$\sigma^2_{K_1}(S_0)/m^2_{W_1}(S_0)$ しか得られないことがわかる。

5. 測方流動量の確率的同定への適用

1964 年の新潟地震前後におけるデータ分析[1]より、測方流動量は液状化層上層の非液状化層の厚さや地表面の傾斜と強い相関性を有することが知られている。また、計測誤差などの観測ノイズが見い出されている。そのため、各物性値の確率特性の評価に当たってはノイズの存在を無視できない。

本研究では、上述した Universal Cokriging の方法により、測方流動量およびそれとの相関性の高い物性値 (非液状化層の厚さと地表面勾配) を用いて、不偏推定かつ最小誤差分散推定を満足するように、未観測点での測方流動量を推定した。地図上での最適推定値ならびに推定誤差分散の分布やその検討結果については講演会当日に発表する。

参考文献

1) Taguchi, Y. and Hamada, M. : Study on permanent ground displacements due to liquefaction using geotechnical information system, submitted to the Fifth U.S. National Conference on Earthquake Engineering.