I-711 観測ノイズを考慮した条件付き時空間波形のシミュレーション理論

武蔵工業大学　学生員○宮久保　崇
武蔵工業大学　正会員　丸山　收
東電設計(株)　正会員　安部　明夫

1．はじめに

本研究では，観測されたｻﾝﾌﾟﾙ場に，観測ﾉｲｽﾞが含まれるという観測に対する不確定性を考慮したｼﾐｭﾚｰｼｮﾝ理論を示している．したがって，観測点においては観測ﾉｲｽﾞの除去，非観測点においては真の確率場を推定することとなる．以下，本研究では，ｶﾞｳｽ性確率場を対象として相互相関関数を与条件とし，観測値の線形補間式による条件付きｼﾐｭﾚｰｼｮﾝ理論を示している．さらに，条件付き平均値および条件付き分散値の理論解を示している．

2．相互相関関数を与条件とする補間理論

（1）　最小誤差分散に基づく線形補間式の誘導

非観測点における確率場;Z*(X r,k)を推定するための補間式を次の様に与える[1,2,5]．

$$Z^*(Xr,k)=\hat{Z}(Xr,k)+\varepsilon(Xr,k) \tag{1}$$

$$\hat{Z}(Xr,k)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=-M}^{M}\lambda' ij(Xr)Y(Xr,k+j) \tag{2}$$

$$\varepsilon(Xr,k)=Z(Xr,k)-\hat{Z}(Xr,k) \tag{3}$$

ここで，ε(X r,k)は，推定誤差関数である．式(2)・(3)においてｻﾝﾌﾟﾙ推定値は次式となる．

$$\underline{Z}^*(Xr,k)=\underline{\hat{Z}}(Xr,k)+\underline{\varepsilon}(Xr,k) \tag{4}$$

また，観測ﾃﾞｰﾀは真の確率場の線形変換に，観測ﾉｲｽﾞが付加されて与えられるものとする．

$$Y(\mathbf{X}i,k)=g(\mathbf{X}i,k)Z(\mathbf{X}i,k)+\nu(\mathbf{X}i,k) \tag{5}$$

ここで，ν(Xi,k)は，平均値0，分散ωのｶﾞｳｽ白色雑音である．また，g(X i,k)は既知定数である．式(2)において$\hat{Z}$(X r,k)は，観測点における確率場;Y(X i,k+j), i=1～N,j=-M～Mの線形補間式により表される非観測点の確率場である．また式(2)は，時間方向に時刻;k△を中心とした±M△時間の範囲の既観測値による補間式となっている．これは非観測点と相関の高い既観測値を用いて非観測点における確率場を推定する効率化を行っている．また，式(2)は，E[Z(X r,k)]=E[$\hat{Z}$(X r,k)]=0を満たすので不偏推定式であり，式(3)よりE[ε(X r,k)]=0であるので，E[Z*(X r,k)]=0である．式(2)における未知係数;λ ij(X r)を，推定誤差の自乗期待値が最小となる様に決定すると次式を得る．

$$\lambda(\mathbf{X}r)=(\mathbf{g}k\mathbf{C}\mathbf{g}k^T+\omega)^{-1}\mathbf{g}k\mathbf{C}\mathbf{X}r \tag{6}$$

ここで，$\boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{X}r)=[\lambda\,1\text{-}M(\mathbf{X}r)\cdots\lambda\,10(\mathbf{X}r)\cdots\lambda\,1M(\mathbf{X}r)/\lambda\,2\text{-}M(\mathbf{X}r)\cdots\lambda\,20(\mathbf{X}r)\cdots\lambda\,2M(\mathbf{X}r)/\cdots\cdots/$
$\lambda\,N\text{-}M(\mathbf{X}r)\cdots\lambda\,N0(\mathbf{X}r)\cdots\lambda\,NM(\mathbf{X}r)]$

$\mathbf{Z}^Tk=[Z(\mathbf{X}1,k-M)\cdots Z(\mathbf{X}1,k)\cdots Z(\mathbf{X}1,k+M)/Z(\mathbf{X}2,k-M)\cdots Z(\mathbf{X}2,k)\cdots Z(\mathbf{X}2,k+M)/\cdots\cdots/$
$Z(\mathbf{X}N,k-M)\cdots Z(\mathbf{X}N,k)\cdots Z(\mathbf{X}N,k+M)]$

$\mathbf{C}\mathbf{X}r=E[\mathbf{Z}kZ(\mathbf{X}r,k)],\mathbf{C}=E[\mathbf{Z}k\mathbf{Z}^Tk]$

$\mathrm{diag}(\mathbf{g}\,k)=[g(X_1,k-M),\cdots,g(X_1,k),\cdots,g(X_1,k+M),g(X_2,k-M),\cdots,g(X_2,k),\cdots,g(X_2,k+M),g(X_N,k-M),\cdots,$
$g(X_N,k),\cdots,g(X_N,k+M)]$

ここで，ε(X r,k)の性質を調べると次式の様になる．

$$E[\varepsilon(\mathbf{X}r,k)Y(\mathbf{X}i,k+j)]=0,i=1\sim N,j=-M\sim M \tag{7a}$$
$$E[\varepsilon(\mathbf{X}r,k)\hat{Z}(\mathbf{X}r,k)]=0 \tag{7b}$$

（2）　条件付き平均値，条件付き分散値の誘導

本研究では補間式が線形であるので，観測点;X i,(i=1,2,…,N)においてｻﾝﾌﾟﾙ実現値が得られた場合の条件付き平均値は，式(1)および式(2)から容易に求めることができる．

$$\mu Z^*(Xr,k)/\mathrm{cond.} = E[Z^*(Xr,k)/\underline{Y}(Xi,j), i=1\sim N, j=1\sim NT]$$

$$\fallingdotseq E[Z^*(Xr,k)/\underline{Y}(Xi,k+j), i=1\sim N, j=-M\sim M]$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=-M}^{M}\lambda ij(Xr)\underline{Y}(Xi,k+j) + E[\varepsilon(Xr,k)/\underline{Y}(Xi,k+j), i=1\sim N, j=-M\sim M]$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=-M}^{M}\lambda ij(Xr)\underline{Y}(Xi,k+j) \tag{8}$$

ここで，ＮＴは時間方向における観測数である．

また，条件付き分散値は次式で与えられる．

$$\sigma^2 Z^*(Xr,k)/\mathrm{cond.} = E[\varepsilon(Xr,k)^2] = C(0,0) - CXr^T g_k^T (g_k C g_k^T + w)^{-1} g_k CXr \tag{9}$$

（３）　条件付きサンプル場のシミュレート

条件付きｻﾝﾌﾟﾙ場をｼﾐｭﾚｰﾄするためには，式(4)における $Z(Xr,k)$(または $\lambda ij(Xr)$)および $\varepsilon(Xr,k)$を求めることが必要となる．ここでは，式(1)の $\varepsilon(Xr,k)$を自己回帰ﾓﾃﾞﾙに展開し，次式で与える[2]．

$$Z^*(Xr,k) = \hat{Z}(Xr,k) + \delta(Xr,k) \tag{10}$$

$$\hat{Z}(Xr,k) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=-M}^{M}\lambda' ij(Xr)Y(Xi,k+j) + \sum_{\ell=-M}^{-1}\lambda' r\ell(Xr)Z(Xr,k+\ell) \tag{11}$$

$$\delta(Xr,k) = Z(Xr,k) - \hat{Z}(Xr,k) \tag{12}$$

次に，最小誤差分散の法則に基づいて，推定誤差;$Z(\mathbf{X},t) - \hat{Z}(\mathbf{X},t)$の自乗期待値を最小とする様に未知係数;$\lambda' ij(\mathbf{X}r)$および$\lambda' i\iota(\mathbf{X}r)$に決定すると次式を得る．

$$\boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{X}r) = (\underline{\mathbf{g}}'k\mathbf{C}'\underline{\mathbf{g}}'k^T + \boldsymbol{\omega}')^{-1}\,\underline{\mathbf{g}}'k\mathbf{C}'\mathbf{X}r \tag{13}$$

ここで，$\boldsymbol{\lambda}'^T(\mathbf{X}r) = [\lambda' 1\text{-}M(\mathbf{X}r)\cdots\lambda' 10(\mathbf{X}r)\cdots\lambda' 1M(\mathbf{X}r)/\lambda' 2\text{-}M(\mathbf{X}r)\cdots\lambda' 20(\mathbf{X}r)\cdots\lambda' 2M(\mathbf{X}r)/\cdots\cdots/$

$\lambda' r\text{-}M(\mathbf{X}r)\cdots\lambda' r\text{-}M(\mathbf{X}r)\cdots\lambda' r\text{-}1(\mathbf{X}r)]$

$\mathbf{Z}'^T k = [Z(\mathbf{X}1,k-M)\cdots Z(\mathbf{X}1,k)\cdots Z(\mathbf{X}1,k+M)/Z(\mathbf{X}2,k-M)\cdots Z(\mathbf{X}2,k)\cdots Z(\mathbf{X}2,k+M)/\cdots\cdots/$

$Z(\mathbf{X}N,k-M)\cdots Z(\mathbf{X}N,k)\cdots Z(\mathbf{X}N,k+M)/Z(\mathbf{X}r,k-M)\cdots Z(\mathbf{X}r,k-M+1)\cdots Z(\mathbf{X}r,k-1)]$

$\mathbf{C}'\mathbf{X}r = E[\mathbf{Z}'kZ(\mathbf{X}r,k)]$,　$\mathbf{C}' = E[\mathbf{Z}'k, \mathbf{Z}'^T k]$

$\mathrm{diag}(\mathbf{g}'k) = [g(X_1,k-M),\cdots,g(X_1,k),\cdots,g(X_1,k+M),g(X_2,k-M),\cdots,g(X_2,k),\cdots,g(X_2,k+M),g(X_N,k-M),\cdots,$

$g(X_N,k),\cdots,g(X_N,k+M),1,1,\cdots,1]$

また，式(12)のもとで $\delta(Xr,k)$の分散は次式で与えられる．

$$\sigma^2\delta(Xr,k) = C(0,0) - \mathbf{C}'Xr^T g'^T_k (g'_k C g'^T_k + w)^{-1} g_k' \mathbf{C}'Xr \tag{14}$$

ここで，$\delta(Xr,k)$は次の性質を有している．

$$E[\delta(\mathbf{X}r,k)Y(\mathbf{X}i,k+j)] = 0 \quad i=1\sim N, j=-M\sim M \tag{15a}$$

$$E[\delta(\mathbf{X}r,k)Z(\mathbf{X}r,k+\ell)] = 0 \quad \ell=-M\sim -1 \tag{15b}$$

ここで式(15)より，$\delta(Xr,k)$は，それぞれ観測点における確率場;$Y(Xi,k+j)$,$(i=1\sim N, j=-M\sim M)$および非観測点における確率場;$Z(Xr,k+\ell)$, $\ell=-M\sim -1$に無相関であることがわかる．したがって条件付きｼﾐｭﾚｰｼｮﾝは漸次拡張方式をもとに行うことができる[1]．また，複数の非観測点における確率場は，$\underline{Z}(\mathbf{X}r,k)$について時間方向のｼﾐｭﾚｰﾄが完了したら，$\underline{Z}(Xr,k)$の時系列を既知観測ﾃﾞｰﾀとして取り込み漸次拡張することでｼﾐｭﾚｰﾄできる．

3．まとめ

本研究では，観測値にﾉｲｽﾞを含む場合の地震波動の補間理論を示した．ここでは，条件付き平均値および条件付き分散値の理論解を示し，条件付きｻﾝﾌﾟﾙ場のｼﾐｭﾚｰﾄ手法を示した．

《参考文献》

(1) 星谷勝:条件付き確率場のシミュレーション理論,土木学会論文集,No.458/I-22,pp.113-118, 1993.
(2) 丸山,星谷,山口:定常・均一ガウス確率場の条件付き地震動シミュレーション,土木学会論文集，第Ｉ部門 (1994年4月号 に掲載予定)