I－706　半無限弾性体上の円板の加振を用いた制御震源による応答

東京大学大学院　学生会員　前島大吾
東京大学地震研究所　正会員　東原紘道

1はじめに

地球内部の３次元構造及びその微小な変動をモニターする事は、地震予知等に価値ある情報をもたらす。その手法として従来は突発的な自然地震を利用してきたが、震源が時間的空間的に不確定なため、制約が多い。それらを解消する為の人工震源は大別して２通り進められている。一つは、一時的ではあるが運搬可能で自然地震の不足部分を補う火薬爆破震源などであり、もう一方は恒常的固定震源である制御交流震源である。交流震源は開発段階にあり完成されていないが、様々なアイデアが出されている。その１つに円形リニアモーターのねじれ振動震源がある。これは円筒状に沿って磁石を並べその内部に対をなす２つの回転体の振動数及び方向を制御することによって精度の良いねじれ振動をおこすものであり、多くの利点があることが示されている。

ところで、制御震源による地球モニタリングの為には、この装置による振動放射を精密に把握することが不可欠である。そのための基礎は半無限弾性体と円板の動的コンプライアンス理論で与えられるが、この理論は２章で示すように様々な研究がなされ、接触面における応力分布及び応力と変位の関係がかなりの高精度で求められるようになった。この手法を拡張する事によって、制御交流震源のねじれ振動に対し、接触面の応答だけでなく弾性体内部の応答も数値計算できる。

2　過去の研究

1904年のLambの研究以来、動的コンプライアンス問題特にねじれ振動モードは多くの研究者によって様々な議論がなされてきた。1936年Ressnerは円板でなく点加震源問題として弾性体の応答を得ている。[1]初期の研究は本来求めるべき円板と弾性体の接触面の応力分布を仮定することによりこの問題を解いていた。1966年RobertsonはDual integral equation法の開発によりこの仮定を取り除き定式化する事に成功した。[2]しかし振動数のべき級数展開により計算が行われたため、振動数の小さい時という制限がつけられた。1971年Lucoはこの定式に差分法を適用させることにより適用範囲の制限を取り除いた。[3]著者らは円板の力学的性質に一切の条件を加えずに、半弾性体のみの解析により接触面の変位と応力を直接、積分変換で関係づけた。その積分核は既知の解析関数の有限区間上の積分と楕円関数の和で与えられる。さらに接触面での応力分布を明らかにし、既往の研究結果と比較することによりその妥当性を示した。[4]

3　本研究のの目的

上で提示した直接積分方程式の積分区間は（０，Ｒ）：Ｒは円板半径，であるが、その解を円板の外側に拡張する事によって、半無限弾性体を伝わる波の応答を求めることができる。Reisserの点加振の解は、中心の近傍では円板加振の解と異なるが、遠方での両者の解はほとんど同じであると考えられる。また、振動数が小さいときは、Robertsonの結果と同じになるはずである。従って過去の研究結果と比較することによりその妥当性を検証することができる。

4　数値計算

半無限弾性体が$z>0$であるように、円柱座標（r,θ,z）をとる。解析の基礎となる関係は、妹沢の３つの特解より与えられる。[5]地表面の垂直応力が０である条件を妹沢の公式に代入すれば、接触面における円周方向の変位νとせん断応力τは、次式のように表示される。

$$\nu(r)=e^{i\omega t}\int_0^\infty \frac{B(x)}{x}J_1(\mathbf{rx})\mathbf{dx} \tag{1}$$

$$\frac{\tau(r)}{\mu}=-e^{i\omega t}\int_0^\infty \frac{\sqrt{(x^2-b^2)}}{x}B(x)J_1(\mathbf{rx})\mathbf{dx} \tag{2}$$

ここにμは剛性を示すLame定数、ρは弾性体の密度、ωは振動数、J_1は１次のBessel関数で、B(x)は未知な関数である。またbは次のように示される。

$$b^2=\frac{\rho\omega^2}{\mu}$$

（２）にFourier-Besselの積分定理を適用すれば、B(x)が求められる。ただし、Rは円板の半径である。

$$B(x)=-\frac{x^2}{\sqrt{(x^2-b^2)}}\int_0^R sJ_1(\mathbf{sx})\{\frac{\tau(s)}{\mu}\}\mathbf{ds} \tag{3}$$

（３）を（１）に代入すれば、変位と応力を直接関係づける基本積分方程式が得られる。

$$\nu(r;z)=\frac{1}{\mu}\int_0^R sV(r;s;z)\tau(s)\,ds \tag{4}$$

$$V(r;s;z)=-\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{(x^2-b^2)}}J_1(\mathbf{rx})J_1(\mathbf{sx})\mathbf{e}^{-\sqrt{(x^2-b^2)}z}\mathbf{dx} \tag{5}$$

基本積分方程式（４）が解析上意味をなすために、そのGreen関数（５）を計算する必要がある。しかしこれらは無限区間上の積分であり、しかもその被積分関数は積分経路上に特異点を有する為、このままでは計算できない。積分の発散部分を分解して計算すると、区間（０，ｂ）上の既知の関数の積分と楕円関数の和で求められ、容易に数値積分が可能である。著者らは既に（４）でｚ＝０における円板の変位νを与えV(r,s,0)を計算しτを定めている。[6]既知となったτを（４）に代入すれば、ν(r,s)すなわち弾性体全域の変位を求める事ができる。
この結果は当日示す。

参考文献

１）Reisser,E.:Freie und erzwugene Torsionsschwingungen des elastischen Halbraumes. Ingenieur Archiv,Vol.8 (1932)
２）Robertson,I.A:On a proposed determination of the shear modulus of isotropic elastic half-spase by the forced torsional osillations of a circular disc.Applied Science Reseach,Vol.17(1967)
３）Luco,J.E.:Dynamic response of circular footings.J,Eng,Mech.,ASCE,Vol17(1967)
４）東原紘道:半無限弾性体上の円板の動的コンプライアンス問題 その３ 軸対象モード,日本建築学会構造系論文報告第387号(1987)
５）妹沢克惟:方位的分布を持つレーリー波の研究東大地震研所報,Vol.6(1926)
６）Higashihara,H.:Explicit Green's Function Approach to Torsionally Oscillating Circular Disk on Elastic Half Space,THEORETICAL AND MECHANICS Vol.35(1987)