I-657 薄層要素－離散化波数法を用いた圧縮性流体層を含む成層弾性体の動的解析手法の展開

東京理科大学　正員　東平光生

1. はじめに

著者は一連の研究[1)2)]で薄層要素-離散化波数法を用いた成層弾性体の Green 関数の算定手法を展開してきた。ここでは、この手法を用いて、圧縮性流体層を含む成層弾性体の Green 関数の算定手法を展開する。特に、成層弾性体中の圧縮性流体を取り扱う既往の研究[3)]を参照すると、流体領域の未知量として、変位と圧力が用いられている。そして、これらの未知量を用いて固体の波動方程式と流体の波動方程式が結合されている。これによっても実際の現象をうまく説明しているようであるが、ここでは流体領域の未知量はあくまで、流体粒子の速度と圧力であるという観点で定式化を行ってみる。

2. 基礎方程式

定式化に必要な基礎方程式を以下に与える。固体領域については、次の弾性波動方程式を用いる。

$$(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+\mu\nabla^2\mathbf{u}-\rho\partial_t^2\mathbf{u}=-\mathbf{f} \tag{1}$$

ここに、λおよびμは Lamé の定数、ρは固体の質量密度、∂は偏微分の演算子で、下付きの添字で偏微分を行う。また、t は時間、$\mathbf{u}$ は変位場、$\mathbf{f}$は物体力である。

流体領域については、流体が微小振幅の運動を行うものと仮定し、次の圧力に関する波動方程式を用いる。

$$\nabla^2 p-\frac{1}{c^2}\partial_t^2 p=-g \tag{2}$$

ここに、p は流体圧力、c は流体中の音速の伝播速度、gは流体領域に加えられる物体力である。

固体と流体の境界では、固体と流体が相互作用を行う。相互作用の方程式は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma} \;=\; -\boldsymbol{n}\,p \tag{3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} \;=\; -\rho_w\boldsymbol{n}\cdot\partial_t^2\mathbf{u} \tag{4}$$

ここに、$\boldsymbol{\sigma}$は固体の表面力ベクトル、$\boldsymbol{n}$ は固体から見て外向きの固体表面の法線ベクトル、ρ_wは流体の質量密度である。固体と流体の相互作用方程式の中で式(4) は固体と流体が剥離しない条件、すなわち固体と流体の境界では両者の速度が一致するという条件で得られる方程式である。

3. 薄層要素-離散化波数法による固体-流体系の波動方程式の解

これまでの手法と同様に、固体の変位場と物体力を surface vector harmonics[4)]を用いて次のように展開する。

$$\mathbf{u}(r,\phi,z,t) \;=\; \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}[U_{zk_n}^m(z,t)\mathbf{R}_{k_n}^m(r,\phi)+U_{rk_n}^m(z,t)\mathbf{S}_{k_n}^m(r,\phi)+U_{\phi k_n}^m(z,t)\mathbf{T}_{k_n}^m(r,\phi)] \tag{5}$$

$$\mathbf{f}(r,\phi,z,t) \;=\; \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}[F_{zk_n}^m(z,t)\mathbf{R}_{k_n}^m(r,\phi)+F_{rk_n}^m(z,t)\mathbf{S}_{k_n}^m(r,\phi)+F_{\phi k_n}^m(z,t)\mathbf{T}_{k_n}^m(r,\phi)] \tag{6}$$

ここに、$\mathbf{R}_{k_n}^m$、$\mathbf{S}_{k_n}^m$および$\mathbf{T}_{k_n}^m$は surface vector harmonics で水平方向に伝播する波動の空間変動を特徴づける関数である。また、k_nは離散化波数、r,ϕおよび zは円筒座標系の座標成分、m はϕに関する Fourier 級数の次数で、べき乗を表すものでないことに注意する。

また、流体圧力と流体に加わる物体力については、次のような Fourier-Bessel 級数を用いる。

$$p(r,\phi,z,t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}P_{k_n}^m(z,t)J_m(k_nr)\exp(im\phi) \tag{7}$$

$$g(r,\phi,z,t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}G_{k_n}^m(z,t)J_m(k_nr)\exp(im\phi) \tag{8}$$

ここに、J_mは m 次の第１種 Bessel 関数である。

式(5)から式(8)を用いて時間-空間領域の波動方程式を時間-波数領域の波動方程式に変換し、これらに薄層要素法を適用することで、次の方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} M_S & 0 \\ -\rho_w\Psi^T & M_F \end{bmatrix}\frac{d^2}{dt^2}\begin{Bmatrix} U_{k_n}^m \\ P_{k_n}^m \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} K_{(S)k_n}^m & \Psi \\ 0 & K_{(F)k_n}^m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_{k_n}^m \\ P_{k_n}^m \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_{k_n}^m \\ G_{k_n}^m \end{Bmatrix} \tag{9}$$

ここに、M_S,M_Fは固体および流体領域の質量マトリックス、$K_{(S)}$,$K_{(F)}$は固体および流体領域の剛性マトリックスである。また、Ψは固体と流体の相互作用方程式から決まるマトリックスである。

式(9)より明かなように、固体と流体の相互作用方程式のために、対称マトリックスに関する方程式は得られない。したがって、式(9)をモーダルアナリシスで解くためには、非対称マトリックスの固有値解析を行う必要がある。この結果、得られる固有値および固有ベクトルは一般に複素数となる。

非対称マトリックスの固有値解析を行い、かつ因果性を考慮して固有モードを重ね合わせることで、固体および流体の波動方程式の解は次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} u(r,\phi) \\ p(r,\phi) \end{Bmatrix}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[H_{k_n}^m(r,\phi)\right]\int_0^t\left[V_{k_n}^m\right]\left[\Lambda_{k_n}^m(t-\tau)\right]\left[V_{k_n}^m\right]^{-1}[M]^{-1}\begin{Bmatrix} F_{k_n}^m(\tau) \\ G_{k_n}^m(\tau) \end{Bmatrix}d\tau \tag{10}$$

ここに、$[M]$は、式(9)の質量マトリックスの項をまとめて、表記したものであり、モーダルマトリックス$[V_{k_n}^m]$はマトリックス$[M]^{-1}[K]$に対する固有値解析から得られるものである。ただし、$[K]$は、式(9)の剛性マトリックスの項をまとめて表記したものである。また、マトリックス$[H_{k_n}^m(r,\phi)]$は、surface vector harmonics および流体圧力を展開した関数$J_m(k_nr)\exp(im\phi)$を成分としている。さらに、$[\Lambda_{k_n}^m(t-\tau)]$は、固有関数を成分とする対角マトリックスであり、固有関数は複素固有値解析の結果から一般には複素関数となっている。

4. 定式化に関する考察

本手法では、固体-流体の相互作用方程式を式(3)および式(4)の形で導入したため、非対称マトリックスの方程式が得られることになった。一方、既往の研究に見られるように、流体領域の未知量を変位と圧力と仮定し定式化を行えば、対称マトリックスに関する方程式が得られることになる。対称マトリックスを扱う限り、固有モードは実数となる。しかし、非対称マトリックスを扱う場合には固有モードは一般に複素数となる。この違いが物理的にどのような意味を持つかは、興味ある問題となる。

なお、非対称マトリックスから得られる複素固有ベクトルを因果性を考慮して重ね合わせることで、時間領域の解が実関数となることは、比較的容易に示すことができる。限られた紙面の都合上、詳細な議論は省略するが、実マトリックスに対して、互いに複素共役な固有ベクトルが存在することがその根拠になる。

最後に、ここでの固有値問題が対角化可能な固有値問題を与えるかどうかも興味ある問題である。流体領域を固体がサンドイッチ状に挟み込む例題を解析したところ、マトリックスは対角化された。これらの点を含め、数値計算結果の詳細は発表当日に言及する。

参考文献

1)東平光生: 土木学会論文集, No. 465/I-22, pp. 137-144, 1993.4

2)東平光生: 土木学会論文集, No. 483/I-26, pp. 127-136, 1994.1

3)Ewing et al.: Elastic Waves in Layered Media, 1957

4)Olson et al.: Geophys. J. R. astr. Soc., Vol. 77, pp. 421-460, 1984