

I-656 半無限成層地盤を伝わる弾性波の特性方程式から与えられる固有モードの性質

佐藤工業(株) 正会員 秋山伸一
早稲田大学 正会員 宮原 玄

1. はじめに

Love波は半無限成層地盤を伝わる代表的な固有モードのひとつである。このモードは面外波動の特性方程式の実根から与えられる。ところで、この方程式を見ると実根以外に複素根も存在することが予想される。このようなことから、Tazime¹⁾は面外波動の特性方程式から実際に複素根を求めている。これらの実根や複素根はどちらも同じ方程式から求められるので、相互に関連があると考えられるが、この研究からは複素根によるモードとLove波モードの関係が必ずしも明らかにされたとは言いがたい。ここでは、Love波モードとの関連に着目して、複素根から与えられる固有モードの性質について検討した結果を述べる。

2. 特性方程式の根の存在条件

弾性流体を伝わる音波の分野では特性方程式の実根の存在条件が示されている²⁾³⁾。これらを参考に、まず成層地盤を伝わる弾性波の特性方程式の実根と複素根の存在条件について検討する。

Fig.1に地盤モデルを示す。図中の $\mu_j, C_j (j=0,1)$ は各々せん断剛性とせん断波速度を示す。ここで、 $C_0 > C_1$ であるものとする。この地盤を伝わる面外波動の特性方程式は次式で表される。

$$\mu_0 \eta_0 \cos \eta_1 H + i \mu_1 \eta_1 \sin \eta_1 H = 0 \quad (1)$$

式(1)で η_0 と η_1 は鉛直方向の波数を示し、次式で表される。

$$\eta_0 = (k_0^2 - \xi^2)^{1/2}, \quad \eta_1 = (k_1^2 - \xi^2)^{1/2} \quad (2)$$

ここに、 $k_0 = \omega / C_0$ 、 $k_1 = \omega / C_1$ 、また ω は角振動数、 ξ は水平方向の波数を示す。ここでは ω を実数のパラメータ、 ξ を複素数の根とした上で検討を進める。

式(1)が成立するための条件を調べるために、まず、 $\eta_0 H = p_0 + i q_0$ 、 $\eta_1 H = p_1 + i q_1$ と置く。続いて、これらを式(1)に代入すると次式が得られる。

$$\frac{\mu_0}{\mu_1} \cdot \frac{p_1^2 + q_0^2}{p_1^2 + q_1^2} \cdot \frac{q_1}{q_0} = \frac{\sinh q_1 \cosh q_1}{\cos^2 p_1 \cosh^2 q_1 + \sin^2 p_1 \sinh^2 q_1} \quad (3)$$

式(3)は、 $q_0 < 0 (\text{Im} \eta_0 < 0)$ の場合には $q_1 = 0 (\text{Im} \eta_1 = 0)$ である時に限り成り立つ。すなわち、式(1)の根が存在する。このような条件を満たす根は式(2)より $|k_0| \leq \xi \leq |k_1|$ の範囲内に存在する実根であり、Love波モードの固有値を意味する。一方、 $q_0 > 0$ の場合は左辺と右辺が同符号になるので式(3)が成立する可能性がある。つまり、式(3)は $\text{Im} \eta_0 > 0$ の場合に特性方程式の複素根が存在し得ることを示している。

3. 複素根から導かれるモードの特徴

前節に示した複素根から与えられるモードの性質を調べるために、 $\xi = k_0 \sin \theta$ 、 $\eta_0 = k_0 \cos \theta$ とする。さらに $\theta = \theta_R - i \theta_I$ と置くことにより、 ξ と η_0 は次式に改められる。

$$\begin{aligned} \xi &= k_0 R \sin \theta_R - i k_0 I \cos \theta_R \\ \eta_0 &= k_0 R \cos \theta_R + i k_0 I \sin \theta_R \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 $k_0 R = k_0 \cosh \theta_I$ 、 $k_0 I = k_0 \sinh \theta_I$ である。 $0 \leq \theta_R \leq \pi/2$ 、 $\theta_I \geq 0$ であれば、式(4)より $\text{Im} \xi \leq 0$ 、 $\text{Im} \eta_0 \geq 0$ となるので、ここから与えられるモードは水平方向には減衰し、鉛直方向には増幅する波動を表す。さらに、式(4)はこのモードがFig.2に示すように θ_R に向かって伝播することも示している。ここで、モード変位を $u_0 = \exp(-i \xi x - i \eta_0 z)$ とすると、Fig.2の点Oと点Aの変位は次式で表される。

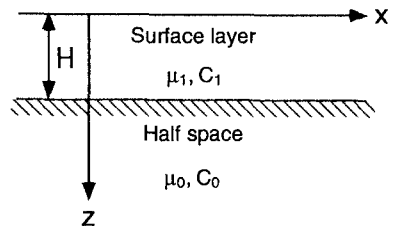


Fig.1. A two-layered model.

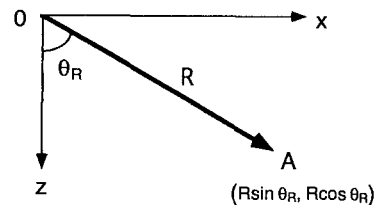


Fig.2. Direction of wave propagation.

$$u_0=1 \text{ (点O)}, \quad u_0=e \times p(-ik_0 R) \text{ (点A)} \quad (5)$$

式(5)より、点Oと点Aの振幅は同一であるから θ_R 方向に伝播する波動は増幅も減衰もしない¹⁾。さらに、点Oと点Aの位相差から θ_R 方向の波動の伝播速度 C' は次式で表される。

$$C' = C_0 / \cosh \theta_1 \quad (6)$$

周知のように実根から与えられるLove波モードは表層付近に集中したエネルギーが水平方向に伝わる性質を持つ。一方、ここに示した複素根から与えられるモードには表層付近のエネルギーが次第に基盤内部に伝わる性質がある。このようなモードはリーキングモード³⁾として捉えることができる。

4. 数値計算による複素根の算出

ここでは実際に式(1)の特性方程式から複素根を求め、前節までの結果を踏まえながら固有モードの性質について検討を加える。方程式を解くに当たっては、まず式(1)を実部と虚部の二つの方程式に分けてこれらを連立させる。さらにニュートン法に基づく繰り返し計算を行い、この非線形連立方程式から複素根を求める。なお、計算は ω をパラメータとして、Table.1に示す地盤の諸元を用いて行う。

Fig.3には ω を増加させた時の ξ 平面上における複素根すなわちリーキングモードの固有値の変化を3次まで示す。図中の矢印は複素根の移動方向を表す。Fig.3によると、複素根は ξ 平面の第4象限に位置する。したがって、 $\text{Im} \xi < 0$ であるから水平方向には伝播に伴いモードが減衰する。

Fig.4には式(4)に基づいて求めた基盤におけるリーキングモードの伝播方向を示す。図中には比較のためにLove波モードの伝播方向も示してある。Fig.4より、モードの伝播方向は周波数の増加に伴い下向きから水平方向に変化して、最終的にLove波モードの伝播方向に一致する。さらに、Fig.3に示す複素根から式(6)を用いて求めた基盤におけるリーキングモードの伝播速度をFig.5に示す。Fig.5より、0Hzから周波数が増加するとリーキングモードの伝播速度は0m/secから増加してcutoff frequencyでLove波の伝播速度に一致する。

5. まとめ

リーキングモードはcutoff frequencyを通じてLove波モードと関連がある。ところが、このモードにはLove波モードとは異なり、表層付近のエネルギーを基盤の深部に伝えるとともに、水平方向に見ると減衰を伴いながら伝播する性質がある。したがって、地表面応答を見た場合、遠方ではLove波モードと比べてリーキングモードの影響は十分に小さいものと考えられる。

参考文献

- 1)Tazime,K.: Complex Roots in the Characteristic Equation for Love-type Waves in a Layer over a Half Space, J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., VII, 1, 4, pp. 283-300. 1960.
- 2)Ewing, W.M., W.S. Jardetzky, F. Press: Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill, 1957.
- 3)Aki, K., P.G. Richards: Quantitative Seismology, Theory and Methods, 1, W.H. Freeman & Company, 1980.

Table.1. Constants of the model.

	Surface layer	Half space
Depth H(m)	100	—
Shear wave velocity (m/sec)	500	1000
Rigidity(kN/m ²)	5.0×10 ⁵	2.0×10 ⁶

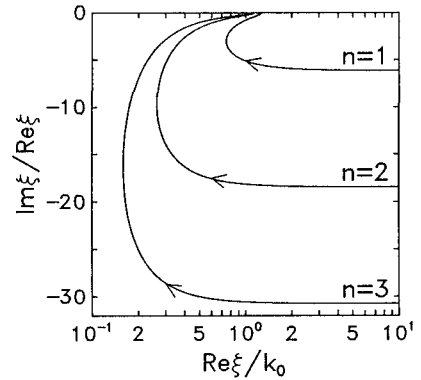


Fig.3. Path of the roots in the ξ -plane.

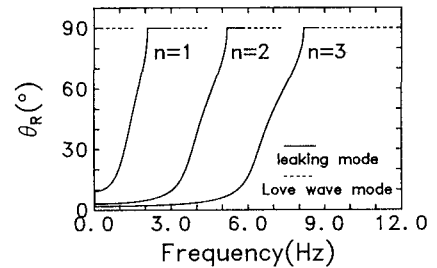


Fig.4. Direction of the leaking modes.

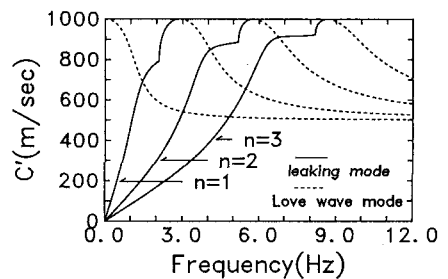


Fig.5. Velocity of the leaking modes.