

1. まえがき

近年、構造物の大型化・柔軟化に伴い、種々の外乱による影響を抑えるため、アクティブ振動制御が実施されるようになった。本研究では、 H^∞ 制御理論と μ シンセシスによる制御器の設計法を用いて、両端単純支持梁（柔軟ビーム）の数値シミュレーションを実施し、最適振動制御におけるロバスト制御性能などの検討を行う。

2. 対象モデル

対象としたモデルは図1の柔軟ビーム（スパン長 L ）である。観測量は x_s の位置における歪みである。操作量 $u(x_a \text{ 地点})$ としてはこの歪みの抑止力を選ぶ。初期時刻におけるインパルス状の打撃加振（100N）として、外乱を与える。図1に示すように、外乱、センサーと操作量は同一地点（ $L/4$ ）に位置する。

ここでは柔軟ビームの鉛直方向の揺れ y に対する振動制御を考える。 y は、モード展開すれば、

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(t) \sin \frac{i\pi x}{L} \quad (1) \quad \text{単位長さ当たりの質量 } m, \text{ 剛性 } E I, \text{ 減衰定数 } \gamma, \text{ ビームの厚さ } h$$

で表せる。ただし、振動モード $\psi_i(t)$ は次の微分方程式を満足する。

$$a \ddot{\psi}_i + b_i \dot{\psi}_i + c_i \psi_i = d_i u \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

ただし、 $a = \frac{mL}{2}$, $b_i = 2\zeta_i \sqrt{a c_i}$, $c_i = \frac{E I i^4 \pi^4}{2 L^3}$, $d_i = \sin \frac{i\pi x_a}{L}$

式(2)に対し、状態量として、 $\mathbf{x} = [x_1^T \ x_2^T \ \dots]^T$ ($x_i = [\psi_i \ \dot{\psi}_i]^T$) を考える。3次までの低次元化モデルを設定すれば、式(3)の状態方程式と式(4)の観測方程式が得られる。

$$\dot{\mathbf{x}} = \text{diag}\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3\} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (3), \quad \mathbf{y} = [\mathbf{C}_1 \ \mathbf{C}_2 \ \mathbf{C}_3] \mathbf{x} \quad (4)$$

ただし、

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_i/a & -b_i/a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ d_i/a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \frac{h}{2} \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \sin \frac{i\pi x_s}{L} & 0 \end{bmatrix}$$

3. 制御器の設計

H^∞ 制御理論における混合感度問題では、ロバスト安定性とノミナル制御性能に対し、各々の重み関数（式(5)の $\mathbf{W}_S$ と式(6)の $\mathbf{W}_T$ ）を設計しなければならない。

$$\|\mathbf{W}_S(s) \mathbf{S}(s)\|_\infty < 1 \quad (5), \quad \|\mathbf{W}_T(s) \mathbf{T}(s)\|_\infty < 1 \quad (6)$$

$\mathbf{S}(s)$ は感度関数、 $\mathbf{T}(s)$ は相補感度関数である。ここでは、種々の検討の結果、次の重み関数を設定した。

$$\mathbf{W}_S(s) = \frac{s + 13000}{100s + 10000}, \quad \mathbf{W}_T(s) = \frac{0.1s + 20}{0.01s + 17000} \quad (7)$$

μ シンセシスにおいては、ロバスト安定性とノミナル制御性能だけでなく、ロバスト制御性能も確保できる。このためには、不確定性のブロック構造 Δ に対する H^∞ 制御系 $\mathbf{M}$ において、構造化特異値 $\mu_\Delta(\mathbf{M})$ に関する条件式（式(8)）を満たさなければならない。

$$\mu_\Delta(\mathbf{M}) < 1 \quad (8)$$

式(8)を解くことは容易ではないし、現在の理論式は存在しない。そのため、ここでは、D-K イテレーションによって、式(8)を満たす解を得る。スケールリングされた上限値の近似解として、 $\mu_\Delta(\mathbf{M})$ は求められる。その際、スケールリングマトリックス $\mathbf{D}$ の付与と H^∞ 制御器 $\mathbf{K}$ の解法を繰り返すことにより、ロバスト制御性能は満足される。なお、 μ シンセシスの詳細については文献1)を参照されたい。

4. 計算結果および考察

図2には、柔軟ビームの実験モデルおよびその低次元化モデルの開ループ特性を、それぞれ、破線と実線で示す。同図より、1) 低次元モデルでは4次以上の高次モードを含んでいないこと、2) 実験モデルと低次元化モデルの基本モードはよく対応していること、しかし、3) 2次と3次モードでは違いが見られることがわかる。すなわち、ここで対象とした数値モデルは不確定誤差を許容したものになっている。

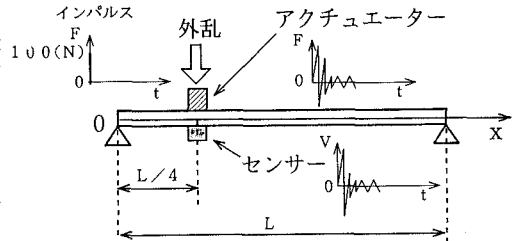


図1 柔軟ビーム

本研究では、図2の低次元化モデルにさらに不確定性を付加したモデルに対し、振動制御を試みる。図3は、このような不確定性を伴うモデルに対し、非制御、 H_2 制御、 H^∞ 制御および μ 制御時における周波数特性を示したものである。図4はそれらに対する歪みの時間応答である。後述するように、 H_2 制御によれば、2次モード付近の振動で発散する。そのため、ここでは、このモードに対し、 $\sigma(\Delta)=15.56(\text{dB})$ の不確定性を考えた。

図2と図3を比べると、不確定性を伴うことにより、非制御時における3次までの固有振動数、すなわち柔軟ビームの動特性が変化していることがわかる。2次モードのそれは約9 Hzから約11 Hzに変化している。ここでは1/4 スパン地点で打撃を加えているため、2次モードが励起される。2次モードでは不確定性を含んでいるため、図4(a)に示すように、非制御の応答は発散する。

図3よりわかるように、非制御時に比べ、各制御時の周波数応答のレベルは小さくなっている。ここでは、全周波数領域において、一定レベルの制振を実施していない。そのため、振動制御を行うことにより、卓越した振動モードが励起され易い。例えば、 H_2 制御および H^∞ 制御では約16 Hz、 μ 制御は約4.5 Hzの振動を生じる。これらの振動は柔軟ビーム自体の減衰によって低減する。この残留振動の振動モードは3.で述べた2つの重み関数に依存する。

図2のモデルに対し、 H_2 制御と H^∞ 制御の制振効果は変わらなかった。しかし、不確定性を付加すると、図4(a)に示すように、 H_2 制御時の応答は発散する。 H_2 制御に比べ、 H^∞ 制御は不確定性にロバストである。しかし、このことは、ロバスト安定性、ノミナル制御性能とロバスト制御性能のいずれにおいても、 H^∞ 制御によって達せられることを意味しない。

μ 制御では、ロバスト制御性能を満足しているため、2次モード付近の不確定性を厳密に見積もることができる。このため、 H^∞ 制御と μ 制御時の応答（図4(b)）を比較すればわかるように、 μ シンセシスはより効率的な制振効果をもたらす。許容できる不確定性を調べてみると、 μ 制御時に最も大きく、ロバスト制御性能が満たされていた。

5. あとがき

本研究では、 H^∞ 制御理論と μ シンセシスを適用して、柔軟ビームの低次元化モデルに対する最適振動制御を実施した。その結果、 H_2 および H^∞ 制御理論に比べて、 μ シンセシスではロバスト制御性能を容易に確保できることがわかった。

謝辞

本研究を進めるに当たって、貴重なご意見を頂いた川谷亮治助教授（長岡技術科学大学）に、お礼を申し上げます。

参考文献

- 1) Doyle, J., Packard, A., and Zhou, K. : Review of LFTs, LMIs and μ : Proc. of the 30th IEEE Conf. on Decision and Control, pp.1227 ~ 1260, 1991.

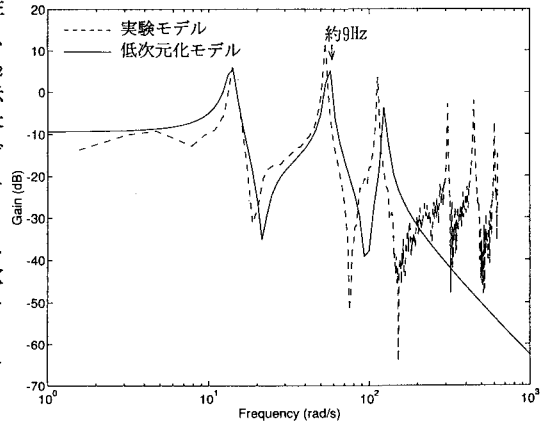


図2 柔軟ビームの開ループ特性

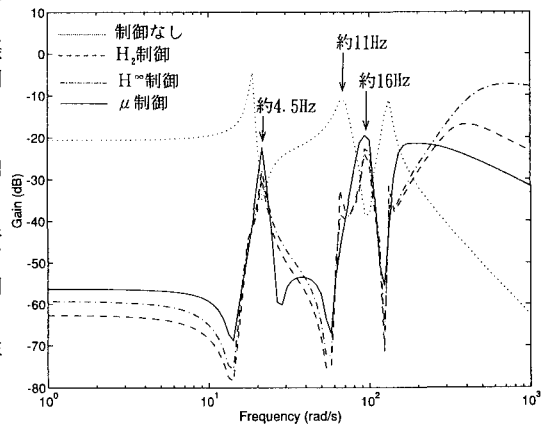
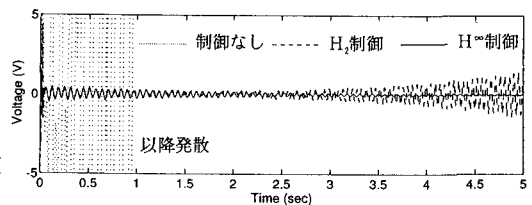
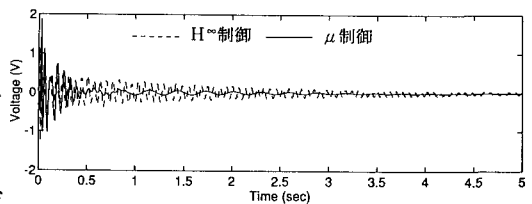


図3 不確定性を伴う非制御・ H_2 制御・ H^∞ 制御・ μ 制御時の周波数応答



(a) 非制御・ H_2 制御・ H^∞ 制御



(b) H^∞ 制御と μ 制御

図4 不確定性を伴うときの歪み波形