I－593

指数関数波の位相速度

八戸工業大学　正　穐山　和男

１.はじめに

棒の曲げ振動の固有関数は,三角関数波の定常波と指数関数波の定常波とから一般には成り立っている。指数関数波の定常波を生じる指数関数波の位相速度を求めてみた。

２.指数関数波の位相速度

棒の横波の運動方程式は,次の４通りの運動方程式を考えることができる。

曲げだけの場合

$$\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=0 \tag{1}$$

回転慣性を考慮する場合

$$\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}-\rho I\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}=0 \tag{2}$$

せん断力による変形を考慮する場合

$$\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}-\frac{\rho EI}{k'G}\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}=0 \tag{3}$$

回転慣性,せん断力による変形の双方を考慮する場合

$$\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}-\left(\rho I+\frac{\rho EI}{k'G}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\rho^2 I}{k'G}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}=0 \tag{4}$$

ここで,ρ ：材料の密度,Ａ：棒の断面積,Ｅ：棒の縦弾性係数,Ｇ：棒の横弾性係数,Ｉ：棒の断面２次モーメント,ｋ'：せん断係数,ｙ：横方向変位,ｘ：軸方向座標,ｔ：時間座標

$y=\exp[i(\gamma x-pt)]$（γ ：波動伝播常数,ｐ：角振動数）とおけば正弦波の位相速度が求まる。そこで,γ をｉγ と置き直し$y=\exp[i(i\gamma x-pt)]$を式（１）から式（４）に代入すると

曲げだけの場合

$$Y=X \tag{5}$$

回転慣性を考慮する場合

$$Y=\frac{X}{(1-X^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{6}$$

せん断力による変形を考慮する場合

$$Y=\frac{X}{(1-aX^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{7}$$

回転慣性,せん断力による変形の双方を考慮する場合

$$Y=\frac{\sqrt{2}X}{\left\{1-(a+1)X^2+\left[1-2(a+1)X^2+(a-1)^2X^4\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}} \tag{8}$$

となる。ここで,$Y=c/c_0, c=p/\gamma, c_0=\sqrt{E/\rho}, X=R\gamma, R=\sqrt{I/A}, a=E/(k'G)$

３.おわりに

定常波は互いに逆方向の進行波の重ね合わせから生じる。固有関数のなかに指数関数波の定常波が含まれているので,指数関数波の位相速度を数式上考えることができる。

参考文献　1)多谷虎男：ベッセル関数と弾性波動理論,山海堂(1986)
2)黒田道雄：機械振動学,学献社(1982)