

I-590

片持ち積層長方形板の振動、座屈及び動的安定性

(株)エイトコンサルタント 正 員○瀬戸真樹 長崎大学工学部 正 員 高橋和雄  
長崎大学工学部 学生員 佐藤栄司 長崎大学工学部 学生員 古谷寿章

1. まえがき 積層板の支配方程式<sup>1)</sup>には、異方性板の特性と曲げモーメントとねじりモーメントの連成項が含まれる。このため、等方性板と比べて解析が複雑となるため、動的安定性まで取扱った研究はきわめて少ない。そこで、著者ら<sup>2)</sup>は解の仮定が容易な Rayleigh-Ritz法を用いて単純支持および固定の組合せからなる積層板の振動、座屈および動的安定性を解析した。引き続き、本研究では文献<sup>2)</sup>の方法を用いて片持ち積層長方形板の解析結果を報告する。

2. ひずみエネルギーおよび解法  $x=0$ の辺が固定された片持ち積層長方形板が  $x$  方向に一様分布の静的面内力  $N_x$  が作用する場合を考える。面外せん断変形を無視した中央対称積層長方形板の、曲げひずみによるエネルギーは、次式のようになる<sup>1)</sup>。

$$V = \frac{1}{2} \iint_A [D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4 D_{16} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 4 D_{26} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 4 D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2] dA \quad (1)$$

ここに、 $D_{11} \sim D_{66}$ : 板剛度、 $w$ : たわみ、 $x, y$ : 平板中央面の座標系

次に、運動エネルギーおよび  $x$  軸方向の面内力がなす仕事は次式のように与えられる。

$$T(w) = \frac{1}{2} \rho h \iint_A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dA, \quad U = \frac{1}{2} \iint_A [N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2] dA \quad \text{ここに、} \rho: \text{板の密度、} h: \text{板厚} \quad (2)$$

$$\text{たわみを次式のように仮定する。} w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} h_m(x) \bar{h}_n(y) \exp(i\omega t) \quad (3)$$

ここに、 $A_{mn}$ : 未定定数、 $\omega$ : 固有円振動数、 $h_m(x)$ : 片持ちばりの固有振動形、 $\bar{h}_n(y)$ : 両端自由ばりの固有振動形<sup>3)</sup>

$$\text{Rayleigh-Ritz法を適用すると} \quad \frac{\partial}{\partial A_{rs}} (V - T - U) = 0 \quad (r=1, 2, 3, \dots, L, \quad s=1, 2, 3, \dots, L) \quad (4)$$

式(4)に式(1)、(2)を代入して、 $\xi=x/a, \eta=y/b, \beta=a/b$ (縦横比)、 $D_1^*=D_{11}/D_1^0, D_2^*=D_{22}/D_1^0, D_3^*=D_{12}/D_1^0, D_4^*=D_{16}/D_1^0, D_5^*=D_{26}/D_1^0, D_6^*=D_{66}/D_1^0$  ( $D_1^0$ : すべての層の  $\theta$  が  $\theta=0^\circ$  の時の板剛性)とする無次元化を行い、式(4)の偏微分を実行した後、積分をしてまとめると、次式のように行列表示される。

$$([E] - \lambda^4 [F] - \lambda_{cr} [G]) \{A\} = \{0\} \quad (5)$$

ここに、 $[E]: E(s+(r-1)L, n+(m-1)L) = E_{mrns}, [F]: F(s+(r-1)L, n+(m-1)L) = F_{mrns}$

$$[G]: G(s+(r-1)L, n+(m-1)L) = G_{mrns}, \quad \{A\}: \{A_{11}A_{12} \dots A_{1L}A_{21}A_{22} \dots A_{LL}\}^T$$

$$E_{mrns} = \frac{D_1^*}{\beta^4} I^{22}_{mr} I^{00}_{ns} + \frac{D_3^*}{\beta^2} \{ I^{02}_{mr} I^{20}_{ns} + I^{20}_{mr} I^{02}_{ns} \} + D_2^* I^{00}_{mr} I^{22}_{ns} + 2 \frac{D_4^*}{\beta^3} \{ I^{12}_{mr} I^{10}_{ns} + I^{21}_{mr} I^{01}_{ns} \} + 2 \frac{D_5^*}{\beta} \{ I^{10}_{mr} I^{12}_{ns} + I^{01}_{mr} I^{21}_{ns} \} + 4 \frac{D_6^*}{\beta^2} I^{11}_{mr} I^{11}_{ns}$$

$$F_{mrns} = I^{00}_{mr} I^{00}_{ns}, \quad \lambda^4 = \rho h \omega^2 \frac{b^4}{D_1^0}, \quad G_{mrns} = \frac{1}{\beta^2} I^{11}_{mr} I^{00}_{ns}, \quad \lambda_{cr} = N_x \frac{b^2}{D_1^0}$$

$I^{00}_{mr}, I^{00}_{ns}, \dots: h_m, h_r, \bar{h}_n, \bar{h}_s$  およびその微分からなる定積分。

式(5)で  $\lambda_{cr}=0$  とおけば、自由振動の固有値  $\lambda$  が得られ、 $\lambda=0$  とおけば座屈固有値  $\lambda_{cr}$  が得られる。数値計算においては、式(5)を行列の固有値問題として解くことができる。なお、動的安定性は、式(3)によって得られる固有振動形を用いて同じく Rayleigh-Ritz法による解析を行う。

### 3. 数値結果

#### (1) 固有振動特性

図-1, 2にEGLOSS/EP、GRAPHITE/EPを用いた片持ち正方形板( $\beta=1.0$ )の固有振動曲線をカップリングを考慮した場合と無視した場合について示す。縦軸 $\omega^*$ は無次元固有振動数、横軸 $\theta$ はラミナの繊維角度である。カップリングの影響は、材料の異方性の強いGRAPHITEの方が大きい。また、固有振動数が高次になるにつれて、カップリングの影響も大きくなる。なお、繊維角度によってモードも変化する。

#### (2) 座屈特性

図-3に材料GRAPHITE/EPの片持ち長方形板の座屈曲線を示す。縦軸 $\lambda_{cr}$ は座屈固有値、横軸 $\beta$ は縦横比である。ラミナの繊維角度が大きくなるにつれて、座屈固有値は小さくなり、カップリングの影響は顕著に表われる。(EGLOSS/EP, 3層,  $\beta=1.0$ )

また、片持ち板の場合は他のケース<sup>2)</sup>と比べると縦横比が大きくなると、繊維角度の影響が小さくなる傾向がある。

#### (3) 動的安定性

図-4はGRAPHITE/EPを用いた片持ち正方形板( $\beta=1.0$ )の繊維角度の変化による動的不安定領域の変動を示している。繊維角度を $\theta=0^\circ$ から $90^\circ$ まで変化させるにつれて、動的不安定領域は広くなる。この傾向は低次の主不安定領域において顕著である。

4. まとめ 異方性の強い材料ほどカップリングの影響は大きくなる。動的不安定領域に対する材質、積層数の影響は講演時に発表する。

#### 参考文献

- 1) 福田: 異方性の積極利用(1), 日本複合材料学会誌, 14-1, pp.20-25, 1988.
- 2) 高橋、佐藤、江島: 構造工学における数値解析シンポジウム論文集, 第17巻, pp.197-202, 1993.
- 3) 高橋、古谷、江島: 長崎大学工学部研究報告, 第23巻第41号, pp.171-177, 1993.

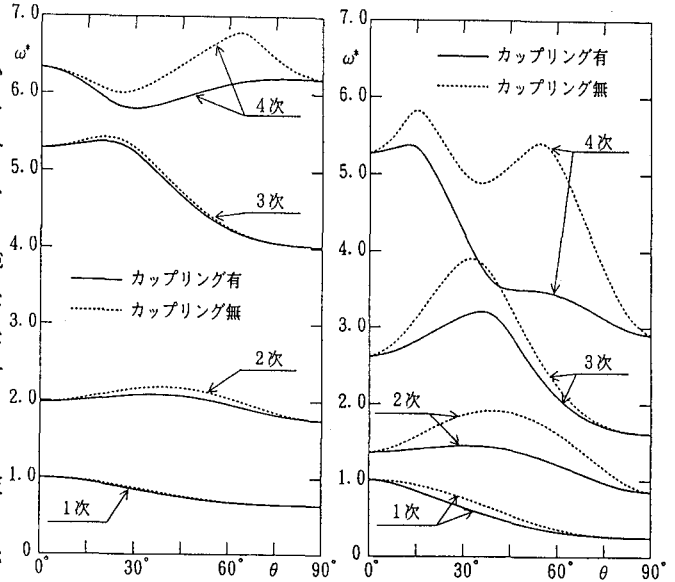


図-1 固有値曲線

図-2 固有値曲線

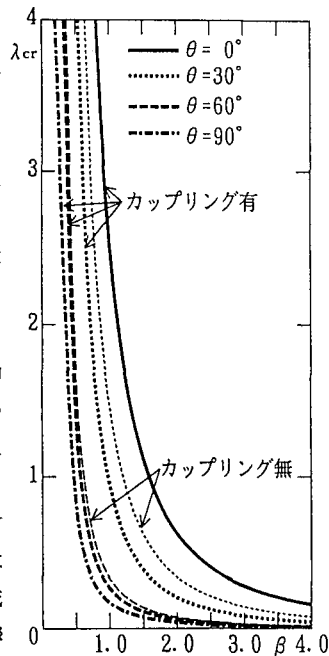
(GRAPHITE/EP, 3層,  $\beta=1.0$ )

図-3 座屈曲線

(GRAPHITE/EP, 3層)

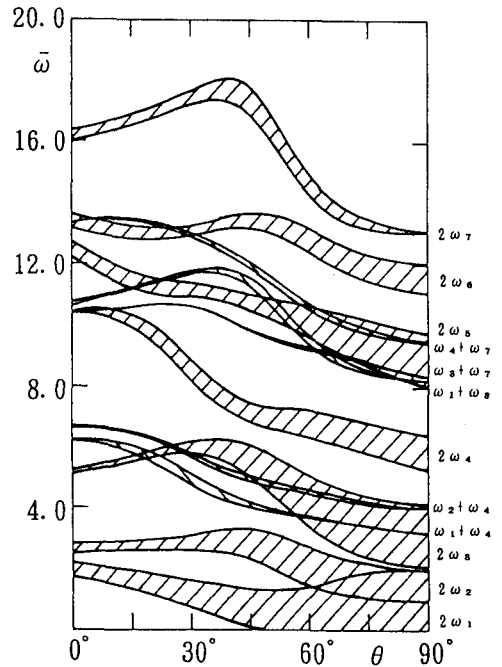


図-4 動的不安定領域

(GRAPHITE/EP, 3層,  $\beta=1.0, l/2a=0.5$ )