

鹿島 技術研究所 正 員 増川 淳二

東京大学大学院 学生員 K. Wilde

東京大学工学部 正 員 藤野 陽三

1. はじめに

近年の橋の超長大化とともに、フラッターの生じる限界風速の低下や、風の乱れによるガスト応答が重要な問題となる。フラッター限界風速を上昇させる方法として、桁のねじれ剛性を高めることが挙げられるが、空力アクティブ制御により空気力学的に系の減衰を高めることも一つの有力な方法として考案されている⁽¹⁾。このアクティブフラッター制御あるいはフラッター・ガスト応答解析を行う際、非定常空気力が過去の運動に関する畳み込み積分で表されることに起因して、非定常空気力係数が振動数に依存する形で与えられるため、解析が困難である。

そこで本論文において、たわみとねじれの2自由度で運動する橋桁に作用する非定常空気力を、補助変数を導入することにより係数が振動数に依存しない形で近似的に有限次数の状態方程式で表示することを行った。

2. 任意運動する2次元翼に作用する非定常空気力の有限次数近似モデルの定式化

図1の様に一定風速 U の元で、たわみ h とねじれ α の2自由度で任意運動を行う2次元翼に作用する非定常揚力 L および非定常モーメント M は、翼面の前縁から75%幅の位置のある瞬間における風速の垂直成分(上向き正) $w_{zc}(s)$ 及びWagner関数 $\phi(s)$ を用いて表すことができ⁽²⁾、部分積分などを行なうと、次式の様に表される。

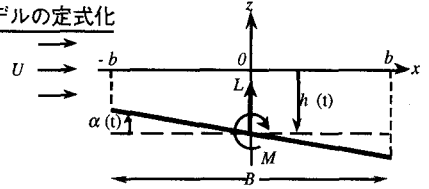


図1

$$L = \pi \rho U^2 b \left[\frac{h''}{b} + \frac{h'}{b} + \frac{3}{2} \alpha' + 2\phi(0) \frac{h}{b} + \{1 + \phi(0)\} \alpha \right] + 2\pi \rho U^2 b \int_{-\infty}^s \left[-\left\{ \frac{h}{b} + \frac{1}{2} \alpha \right\} \frac{d}{d\sigma} [\phi(s-\sigma)] + \alpha \phi(s-\sigma) \right] d\sigma$$

$$M = \pi \rho U^2 b^2 \left[-\frac{1}{8} \alpha'' + \frac{1}{2} \frac{h'}{b} - \frac{1}{4} \alpha' + \phi(0) \frac{h}{b} + \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \phi(0) \right\} \alpha \right] + \pi \rho U^2 b^2 \int_{-\infty}^s \left[-\left\{ \frac{h}{b} + \frac{1}{2} \alpha \right\} \frac{d}{d\sigma} [\phi(s-\sigma)] + \alpha \phi(s-\sigma) \right] d\sigma$$

ただし、 $s = Ut/b$ (無次元時間)、 $\phi(s) = \frac{d}{ds} [\phi(s)]$ 、 $w_{zc}(s) = -U \left[\frac{h'}{b} + \alpha + \frac{1}{2} \alpha' \right]$ 、 $(\quad)' = \frac{d}{ds}$

畳み込み関数の核 $\phi(s)$ は超越関数であるので、 $\phi(s)$ を有限個(n_L 個)の指数関数の和 $\phi_a(s) = \sum_{\ell=1}^{n_L} \beta_\ell \exp[-\lambda_\ell s]$ ($\lambda_\ell > 0$)で近似する。これを、元の式に代入し、次の様に補助変数 x_ℓ を定義する。

$$\int_{-\infty}^s \pi \left[-\left\{ \frac{h}{b} + \frac{1}{2} \alpha \right\} \frac{d}{d\sigma} [\phi_a(s-\sigma)] + \alpha \phi_a(s-\sigma) \right] d\sigma = \sum_{\ell=1}^{n_L} \int_{-\infty}^s \left[-\pi \beta_\ell \lambda_\ell \frac{h}{b} - \pi \beta_\ell \left(\frac{1}{2} \lambda_\ell - 1 \right) \alpha \right] e^{-\lambda_\ell (s-\sigma)} d\sigma \equiv \sum_{\ell=1}^{n_L} x_\ell$$

ここで、 x_ℓ を無次元時間 s で微分すると、ライプニッツ(Liebnitz)の公式により、

$$\frac{dx_\ell}{ds} = -\pi \beta_\ell \lambda_\ell \frac{h}{b} - \pi \beta_\ell \left(\frac{1}{2} \lambda_\ell - 1 \right) \alpha - \lambda_\ell x_\ell \quad (\ell = 1, \dots, n_L)$$

となり、補助変数 x_ℓ のそれぞれに関する1階の微分方程式が導かれる。以上をまとめ、無次元時間 s を実時間 t

に変換し、マトリックス表示すると、次式の様な有限次数近似モデルが得られる。($\mathbf{q} = [h/B \quad \alpha]^T$)

$$\mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} L/\frac{1}{2} \rho U^2 B \\ M/\frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \end{bmatrix} = \left(\frac{B}{U} \right)^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \pi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{16} \pi \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \left(\frac{B}{U} \right) \begin{bmatrix} \pi & \frac{3}{4} \pi \\ \frac{1}{4} \pi & -\frac{1}{16} \pi \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} 4\pi \phi_a(0) & \pi(1 + \phi_a(0)) \\ \pi \phi_a(0) & \frac{1}{4} \pi(1 + \phi_a(0)) \end{bmatrix} \mathbf{q} + \sum_{\ell=1}^{n_L} \begin{bmatrix} \pi \\ \frac{1}{4} \pi \end{bmatrix} x_\ell$$

$$\left(\frac{B}{U} \right) \dot{x}_\ell = -2\lambda_\ell x_\ell + [-8\beta_\ell \lambda_\ell \quad -2\beta_\ell (\lambda_\ell - 2)] \mathbf{q} \quad (\ell = 1, \dots, n_L)$$

n_L を大きくすれば、それだけ $\phi_a(s)$ の近似精度が向上し、近似モデルの精度も向上するが、それと引替にモデルの次数が1つずつ増加する。ちなみに、 $n_L = 2$ の場合、W. P. JonesによるWagner関数 $\phi(s)$ についての近似式⁽³⁾を用いて $\phi_a(s)$ は次式の様に近似できる。

$$\phi_a(s) = \frac{d}{ds} \phi(s) = \beta_1 e^{-\lambda_1 s} + \beta_2 e^{-\lambda_2 s}, \quad \phi_a(0) = \beta_1 + \beta_2 \quad (\beta_1 = 0.006765, \beta_2 = 0.1072, \lambda_1 = 0.041, \lambda_2 = 0.32)$$

3. 橋桁に作用する非定常空気力の有限次数近似モデル及びパラメータ決定法

橋桁に作用する非定常空気力の場合も同じように次式で表すことが出来ると考える。ただし、橋桁の場合は空気の見かけの質量を表す慣性項は、一般に橋桁の慣性項に比べて無視できる量であるので以下では省略する。

$$\mathbf{C}_\ell = \left(\frac{B}{U} \right) \mathbf{A}_\ell \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{A}_\ell \mathbf{q} + \sum_{i=1}^{n_\ell} \mathbf{D}_\ell \mathbf{x}_i, \quad \left(\frac{B}{U} \right) \dot{\mathbf{x}}_\ell = -\lambda_\ell \mathbf{x}_\ell + \mathbf{E}_\ell \mathbf{q} \quad (\ell = 1, \dots, n_\ell)$$

ただし、 $\mathbf{A}_\ell, \mathbf{A}_1$ は 2×2 、 $\mathbf{D}_\ell$ は 2×1 、 $\mathbf{E}_\ell$ は 1×2 の実数係数マトリックスである。

このモデルにおける未定パラメータ $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_\ell}$ 及びマトリックス $\mathbf{A}_\ell, \mathbf{A}_1, \mathbf{D}_\ell, \mathbf{E}_\ell$ は、部分模型による風洞実験から得られる非定常空気力測定結果を元に決定する。橋桁が振動数 ω で調和振動していると仮定すると、近似モデルの複素振幅は次の様な有理多項式となる。

$$\bar{\mathbf{C}}_\ell = \hat{\mathbf{Q}}(iK) \cdot \bar{\mathbf{q}} \quad , \quad \hat{\mathbf{Q}}(iK) = \mathbf{A}_0 + (iK) \mathbf{A}_1 + \sum_{i=1}^{n_\ell} \frac{1}{iK + \lambda_i} \mathbf{D}_\ell \mathbf{E}_\ell \quad \text{ただし、} K = \frac{B\omega}{U} \text{ (無次元円振動数)}$$

風洞実験から得られる非定常空気力測定結果は、非定常空気力係数 $H_i^*, A_i^* (i = 1, \dots, 4)$ を用いて、

$$\mathbf{Q}(iK_n) = \begin{bmatrix} -2K_n^2 H_4^* - i2K_n^2 H_1^* & -2K_n^2 H_3^* - i2K_n^2 H_2^* \\ 2K_n^2 A_4^* + i2K_n^2 A_1^* & 2K_n^2 A_3^* + i2K_n^2 A_2^* \end{bmatrix} \quad (K_n \text{ は、非定常空気力測定時における無次元振動数})$$

という形で与えられ、この $\mathbf{Q}$ を $\hat{\mathbf{Q}}$ により有理多項式近似し、最小2乗法を用いることにより未定パラメータを決定する。この際、 $\lambda_i, \mathbf{D}_\ell, \mathbf{E}_\ell$ は非線形の関係にあるので、Nelder-Mead Simplex 法を用いて、 $\lambda_i > 0$ の拘束条件を付加した非線形最適化⁽⁴⁾を行ない、出来るだけ低い次数で高い近似精度を持つモデルの構築を行う。

4. 様々な橋梁断面に作用する非定常空気力への適用例

以上の方法を用いて、明石海峡大橋の実橋トラス断面、流線型箱桁断面（案）及び、Bluffな平板断面（ $B/D=5.8$ ）などに対して近似モデルの構築を行った。実橋トラス断面と流線型箱桁断面についての近似結果の一例を、図2,3に示す。 $n_\ell = 1$ では近似精度が悪いが、2以上ではかなり精度よく近似できている。これらの近似結果と、近似モデルと実験データを用いてフラッター限界風速を比較した結果、誤差が数%以内であることから、ねじれとたわみの2自由度運動をする橋桁に作用する非定常空気力は、2～3個程度の補助変数を導入するだけで、かなり近似精度の高い有限次数近似モデルが構築できることが分かった。ただし、失速角付近での非定常空気力の様な、係数が風速とともに急激に変化する場合、近似が困難であった。

5. あとがき 有限次数近似モデルは、航空工学の分野で発展してきた⁽⁵⁾ものであるが、本論文では、まず翼に作用する非定常空気力の有限次数近似モデルを数学的に導きだすことにより、補助変数や各パラメータの物理的意味を明確にした。さらに、未定パラメータを非線形最適化により決定することにより、翼よりも近似しにくい橋桁の場合でも、低次数で精度の高い近似モデルを構築できることを示した。ちなみに、有限次数近似モデルは他の形も考えられるが、文献[6]において比較した結果、最も優れているモデルをここで示した。得られた近似モデルは、フラッター限界風速予測の際、振動数に関する繰り返しが必要となる他、フラッターの空力アクティブ制御などに特に有効である（参考文献 5～7 参照）。また、このモデルは非定常ガスト応答解析にも適用できる。最後に、風洞実験データをいただいた、京都大学の松本 勝助教授、本四公団の勝地 弘氏、名工大の岩本 政巳氏と、貴重な助言をいただいた航空宇宙技術研究所の松下 洸氏に、ここに感謝の意を示します。

参考文献 1) 小林他, JWEIA, 41-44, 1992 2) Bisplinghoff他: Aeroelasticity, Addison Wesley, 1957 3) Fung: An Introduction to the theory of Aeroelasticity, Dover, 1969 4) Tiffany他, NASA TP-2776, 1988 5) ACT研究会, 航空宇宙技術研究所報告, TR-1070, 1990 6) 増川: 様々な橋梁断面に作用する非定常空気力の有限次数近似モデルとその応用, 東大修士論文, 1994. 3, pp. 1-93 7) K. Wilde, 増川, 藤野: Active Control of Flutter Instability of Bridge Deck with Rational Function Approximation of Aerodynamic Forces, 第49回年次学術講演会（投稿中）

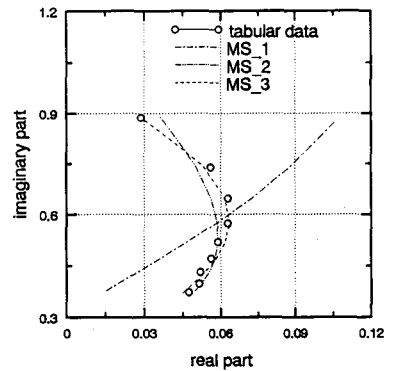


図2 近似結果（トラス断面） $Q_{2,1}$ 成分

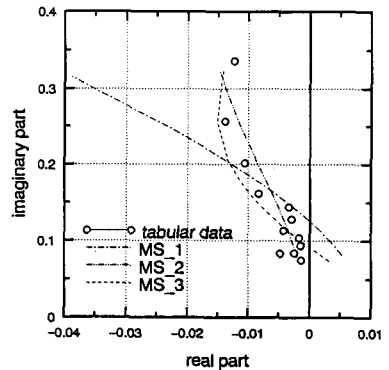


図3 近似結果（流線型箱桁断面） $Q_{2,1}$ 成分