

I-484

代数的手法によるガスト応答解析法に関する研究
—状態方程式表示と共分散マトリックスによる方法—

東京大学大学院 学生員 松本 泰尚

東京大学工学部 正 員 藤野 陽三

東京大学工学部 正 員 バルティア, K. ビノド

1. はじめに

橋梁のフレキシブル化に伴い、風の乱れによるガスト応答が問題となることが多い。ガスト応答については、問題点は指摘されているものの、“ストリップ理論”による定式化¹⁾がなされており、定常ランダムな風に対する線形応答は、周波数領域の解析により求めることができる。しかし、空間的拡がりを持つ多自由度構造物を扱うときには、多重積分を要するモード展開法を用いることが多いが、そのときには、モード間の相関を、計算の複雑上無視せざるを得ないなどの問題がある。

本論では、ランダム過程としての風・空力アドミッタンスを一種のフィルターとしてとらえ、それを線形微分方程式で近似的に表すことにより、すなわち拡張システムを構築し、それを用いてガスト応答を周波数領域上の積分問題としてではなく、代数的に解くことを試みる。

2. 白色雑音(ホワイトノイズ)を入力

とする拡大システムの状態方程式

ここでは、橋桁の鉛直ガストを対象とし、簡単のために2自由度系とする。

本論で考えていることは、図1に示すフィルター1,2,3を微分方程式で示すこと

である。なお、フィルター3については、運動方程式であり、すでに微分方程式で表されている。

(1) 鉛直ガストの状態方程式表現(フィルター1)

Kármán のスペクトルによれば、鉛直ガストのパワースペクトル $S_w(f)$ は、以下のように与えられる。

$$S_w(f) = (2 \sigma_w^2 L_x^w / U) \left[1 + 188.8 (f L_x^w / U)^2 \right] / \left[1 + 70.78 (f L_x^w / U)^2 \right]^{11/6} \quad (1)$$

ただし、 x : 主流方向にとった座標軸、 L_x^w : x 軸方向の w 成分の乱れのスケール、 σ_w : w のr.m.s. 値

これを用いると、主流直角方向にとった y 軸の方向に Δy だけ離れた点の鉛直ガストのクロススペクトル $S_{ww}(\Delta y, f)$ は、以下のように表すことができる。

$$S_{ww}(\Delta y, f) = \frac{2^{1/6} S_w(f)}{\Gamma(5/6)} \cdot \left[\eta^{5/6} K_{5/6}(\eta) - \frac{\eta^{11/6} K_{11/6}(\eta)}{1 + \frac{8}{3} (2\pi/B_1)^2 (f L_y^w / U)^2} \right] \quad (2)$$

ただし、 $\eta = (\Delta y / L_y^w) B_1 \sqrt{1 + (2\pi/B_1)^2 (f L_y^w / U)^2}$, $B_1 = \Gamma(5/6) / \Gamma(1/3)$

L_y^w : y 軸方向の w 成分の乱れのスケール、 K : 第2種の変形されたベッセル関数

ここで、対角成分 (i,i) に i 番目の入力のパワースペクトル、非対角成分 (i,j) に i 番目と j 番目の入力の間のクロススペクトルを配するスペクトルマトリックスを導入する。本論の場合、2自由度系を扱っているため、以下のような 2×2 のマトリックス $\Phi(f)$ を考える。

$$\Phi(f) = \begin{bmatrix} S_w(f) & S_{ww}(f) \\ S_{ww}(f) & S_w(f) \end{bmatrix} \quad (3)$$

次に、このマトリックスの各成分を、ラプラス変換の変数 s を用いた有理関数を用いて近似し、これによってマトリックス $\Phi(s)$ を得る。ここでは、 $s = i\omega = i2\pi f$ ($i = \sqrt{-1}$) の関係を用いている。このとき、 $\Phi(s)$ は、基本マトリックスの積によって、次のように分解することができる(Factorization)^{2),3)}。

$$\Phi(s) = G(-s) G^T(s) \quad (4)$$

$G(s)$ は、基本マトリックスの積の形をしている。上のような分解が可能な時、 $G(s)$ は、白色雑音(ホワイトノイズ) $w(t)$ を入力とし、 $\Phi(s)$ をスペクトルマトリックスにもつ複数の非白色性雑音 $x(t)$ を出力とする、線形フィルターの伝達関数マトリックスを表す。

伝達関数マトリックス $G(s)$ を求めることができれば、それに対応する状態空間表現

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B w(t), y(t) = C x(t) \quad (5)$$

が得られる。この、 $G(s)$ に対応する状態空間表現 (A, B, C) を、 $G(s)$ の実現(Realization)と呼ぶ。

$x(t)$ の初期状態 $x(0)$ を零とすれば、伝達関数マトリックス $G(s)$ は (A, B, C) を用いて、

$$G(s) = C (sI - A)^{-1} B \quad (6)$$

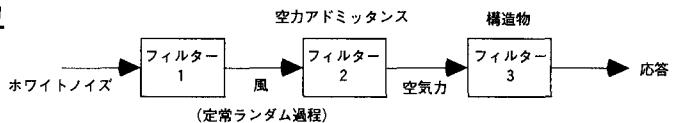


図1 拡大システム

で与えられる⁴⁾。図2, 3に、Kármán のスペクトルと近似したスペクトルとの比較を示す。

(2) 空力アドミッタンスの状態方程式表現(フィルター-2)

鉛直ガストに対する翼の空力アドミッタンスは、Sears関数の二乗で表されることが知られているが、この近似表現として、以下のような関数が与えられている¹⁾。

$$|X_L^w(k)|^2 \equiv (a+k)/[a+(\pi a+1)k+2\pi k^2], \quad a=0.1811 \quad (7)$$

ただし、 $k=\pi(fd/U)$ 、 a : 全弦長

空力アドミッタンスについても、近似的にフィルターに置き換えることが可能であり、鉛直ガスト $y(t)$ を入力、変動揚力 $f(t)$ を出力とした、

$$\dot{h}(t) = D h(t) + E y(t), \quad f(t) = F h(t) \quad (8)$$

で表されるシステムを考えることができる。

(3) 拡大システムの状態方程式

式(5),(8)もとの系の状態方程式に対して、状態変数ベクトルを拡張することによって、不規則な鉛直ガストによる変動揚力を入力とする2階の微分方程式を、ホワイトノイズ $w(t)$ を入力とする1階微分の状態方程式に置き換えることができる。不規則外力を受ける2自由度の運動方程式にたいして、拡大システムの運動方程式は、以下のように書ける。

$$\dot{z}(t) = K z(t) + L w(t) \quad (9)$$

ただし、 $z(t)$: 状態変数ベクトル、 K : 定数係数行列、 L : 定数係数ベクトル、 $w(t)$: ホワイトノイズ

3. 共分散マトリックスを用いた二乗平均応答の解法

式(5)のように、ホワイトノイズ $w(t)$ を入力とする1階のマトリックス微分方程式については、出力である状態変数ベクトル $z(t)$ の共分散マトリックス Σ を、以下の方程式を代数的に解くことによって比較的容易に求めることができる。共分散マトリックス Σ は、式(9)の係数行列 K 、係数ベクトル L に対して、リヤプノフ方程式

$$K \Sigma + \Sigma K^T + M = 0, \quad M = \pi S_0 L L^T \quad (10)$$

ただし、 S_0 : ホワイトノイズのスペクトル密度

を解くことによって求められる⁵⁾。これによって得られた共分散マトリックス Σ から、もとの不規則外力による不規則振動応答の二乗平均を知ることができる。

4. おわりに

ここでは、2自由度系のガスト応答について述べたが、空間的広がりを持つ構造物に、ランダム場としての風が作用する多自由度系についても、上述の方法を拡張することで解析が可能である。

参考文献

- 1) 岡内, 伊藤, 宮田; 耐風構造, 丸善, 1977
- 2) Davis; "Factoring the Spectral Matrix", IEEE Transactions on Automatic Control, 8(4), 1963
- 3) Goßmann, Waller; "Analysis of multi-correlated wind-excited vibrations of structures using the covariance method", Engng. Struct., 5, 1983
- 4) 須田; 線形システム理論, 朝倉書店, 1993
- 5) Bryson, Ho; Applied Optimal Control, Hemisphere, 1975

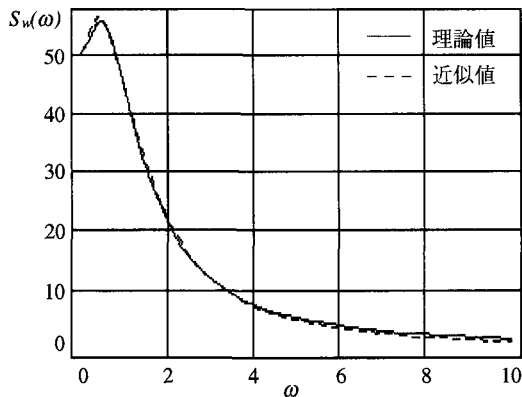


図2 鉛直ガストのパワースペクトル

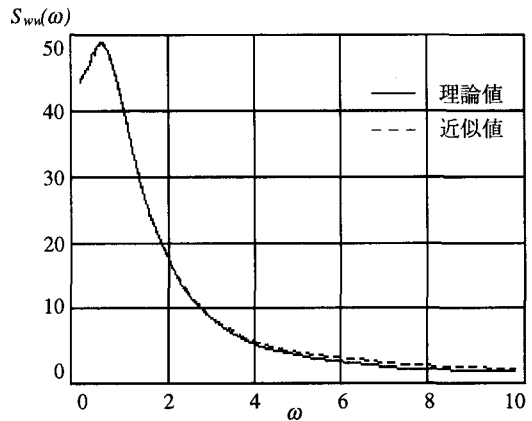


図3 鉛直ガストのクロススペクトル