

I - 468

非線形動的FEMのための直接積分法

若築建設(株) 正会員 酒井久和
 京都大学工学部 正会員 澤田純男
 京都大学工学部 正会員 土岐憲三

1.はじめに 現在、非線形動的解析に用いられている直接積分法としては、中央差分法、Newmarkの β 法¹⁾($\beta=1/4$)等、多くの計算法があるが、前者は解の安定条件が厳しく、後者は非線形の収束計算を行うため、多自由度モデルの場合に膨大な計算時間を要するなど問題点も多い。近年、Sunら²⁾がWilsonの θ 法に運動量保存則を導入し、収束計算を行わない精度の良い直接積分法を提案しているが、この解析法でも解の安定条件が厳しく、有限要素法など多自由度モデルの計算には適さない。そこで、筆者らは多自由度モデルにも適用でき、収束計算が不要な直接積分法を提案し、その適応性について検討を加えた。

2.解析方法 復元力が非線形である系の運動方程式は、質量、減衰、剛性マトリックス、および、復元力の非線形項(以後、調整外力と呼ぶ)、外力ベクトルをそれぞれ、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{Q}(t)$ 、 $\mathbf{P}(t)$ として次式で表すことができる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}(t) - \mathbf{Q}(t) = \mathbf{P}(t) \quad (1)$$

この系の応答計算に際し、逐次積分法として平均加速度法(Newmarkの β 法($\beta=1/4$))を採用する。この場合、時刻 $t_n(=n\Delta t)$ における応答変位、速度、加速度ベクトルをそれぞれ、 $\ddot{\mathbf{X}}_n$ 、 $\dot{\mathbf{X}}_n$ 、 $\mathbf{X}_n$ とすると、時刻 t_{n+1} における各応答ベクトルは次のように表せる。

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{X}}_{n+1} &= (\mathbf{M} + \mathbf{C}\Delta t/2 + \mathbf{K}\Delta t^2/4)^{-1} \{ \mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{C}(\dot{\mathbf{X}}_n + \ddot{\mathbf{X}}_n\Delta t/2) - \mathbf{K}(\mathbf{X}_n + \dot{\mathbf{X}}_n\Delta t + \ddot{\mathbf{X}}_n\Delta t^2/4) + \mathbf{Q}_n \}, \\ \dot{\mathbf{X}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{X}}_n + (\ddot{\mathbf{X}}_n + \ddot{\mathbf{X}}_{n+1})\Delta t/2, \quad \bar{\mathbf{X}}_n = \mathbf{X}_n + \dot{\mathbf{X}}_n\Delta t + (\ddot{\mathbf{X}}_n + \ddot{\mathbf{X}}_{n+1})\Delta t^2/4 \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、この場合、(2)式中の調整外力ベクトル $\mathbf{Q}_n$ は、時刻 t_n における応答変位ベクトル $\mathbf{X}_n$ から求められたものであり、時刻 t_{n+1} における $\mathbf{X}_{n+1}$ に対応した $\mathbf{Q}_{n+1}$ ではない。この意味で、(2)式の左辺の各応答ベクトルに $-$ を付け右辺の既知のベクトルとは区別する。通常、調整外力ベクトルの増分 $\Delta\mathbf{Q}(=\mathbf{Q}_{n+1}-\mathbf{Q}_n)$ が十分小さくなるまで収束計算を行うが、ここでは、この増分 $\Delta\mathbf{Q}$ による応答を中央差分により求める。

この場合の運動方程式は、応答変位ベクトルを $\mathbf{Y}_0$ とすると次式で表すことができる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}}_0 + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}}_0 + \mathbf{K}\mathbf{Y}_0 - \Delta\mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (3)$$

中央差分法では、加速度、速度、変位の間に $\ddot{\mathbf{Y}}_0 = (\mathbf{Y}_1 - 2\mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}_{-1})/\Delta t^2$ 、 $\dot{\mathbf{Y}}_0 = (\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_{-1})/2\Delta t$ の関係が成立すると仮定している。ここでは、 $\Delta\mathbf{Q}$ が作用する以前に算定される変位ベクトル $\mathbf{Y}_0$ および、初期変位ベクトル $\mathbf{Y}_{-1}$ は $\mathbf{0}$ であることから、 $\ddot{\mathbf{Y}}_0 = \mathbf{Y}_1/\Delta t^2$ 、 $\dot{\mathbf{Y}}_0 = \mathbf{Y}_1/2\Delta t$ となり、これらを(3)式に代入することにより、 $\Delta\mathbf{Q}$ が作用するステップにおける応答加速度、速度ベクトルが次式のように表せる。

$$\ddot{\mathbf{Y}}_0 = (\mathbf{M} + \mathbf{C}\Delta t/2)^{-1} \Delta\mathbf{Q}\Delta t^2, \quad \dot{\mathbf{Y}}_0 = (\mathbf{M} + \mathbf{C}\Delta t/2)^{-1} \Delta\mathbf{Q}\Delta t/2 \quad (4)$$

(2)、(4)式で求められる応答を用いて、時刻 t_{n+1} における系の運動方程式が次のように表せる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{Q}_{n+1} = \mathbf{P}_{n+1} \quad (5)$$

ただし、 $\ddot{\mathbf{X}}_{n+1} = \ddot{\mathbf{X}}_{n+1} + \ddot{\mathbf{Y}}_0$ 、 $\dot{\mathbf{X}}_{n+1} = \dot{\mathbf{X}}_{n+1} + \dot{\mathbf{Y}}_0$ 、 $\mathbf{X}_{n+1} = \bar{\mathbf{X}}_{n+1} + \mathbf{Y}_0$ であり、これらを初期条件として順次、応答を求めることができる。

3.解析例 直接積分法の解の安定性および精度を検討するために比較計算を実施した。計算方法はSunらの方法(Sun($\beta=1/6$, $\theta=1.38$))、線形加速度法、平均加速度法に運動量保存則を適用した方法((Sun($\beta=1/6$, $\theta=1.0$)), Sun($\beta=1/4$, $\theta=1.0$))、中央差分法(Central Difference Method)、および上記の提案法(Proposed Method)の5計算法とし、次に示す2つの解析モデルについて、2種類の時間間隔で計算した。参考のため、Newmarkの β 法($\beta=1/4$)に基づき収束計算を行う方法(Iterative Method)の結果も示す。

解析例1 質点がダンパーおよび非線形バネで支持され、重力が作用する系(図-1参照)を考える。系の材料特性は $m=1.0 \times 10^3 \text{ kg}$ 、 $c=0.2 \text{ kN} \cdot \text{sec/m}$ 、 $k=24674 \text{ kN/m}$ ($x \leq 0$)、 $k=0 \text{ kN/m}$ ($x > 0$)、初期条件は $x_0=10 \text{ m}$ 、 $\dot{x}_0=0 \text{ m/sec}$ 、 $\ddot{x}_0=0 \text{ m/sec}^2$ で、 $x \leq 0$ の場合の系の固有周期 T は 0.04 秒 である。

解析例2 N 値30の等方均質な地盤上に構造物が設置されているモデル(図-2参照)を考える。地盤の材料非線形、構造的な非線形(構造物と地盤との剥離、滑動現象)を考慮し、入力地震波としてEl Centro(1940)のNS成分を最大加速度 200 gal に調整したものを採用する。

4.結果と考察 解析例1の応答変位を図-3、解析例2の構造物の重心位置での水平方向応答変位を図-4に示す。

図-3より、計算時間間隔 dt が固有周期 T の1/8倍の場合に、 $\text{Sun}(\beta=1/6, \theta=1.38)$ 以外の計算法は解が安定するが、 dt が T の1/4倍の場合には提案法以外の計算法ではいずれも解が不安定となる。また、図-4より、解析例2のように自由度が多くなると解の安定条件がさらに厳しくなり、 $dt=1/500$ 秒では提案法以外の計算法では発散傾向を示している。提案法は解析例1の $dt=1/8T$ に見られるように、 $\text{Sun}(\beta=1/6, \theta=1.0)$ や中央差分法が安定するような dt の場合には、これらに比べ精度が少し悪くなっている。これは固有振動数との関係で、 dt が長い場合に高周波数成分が減衰しているためで、本手法はこの特性のために高周波数モードの影響を押さえることができ、さらに、低周波数モードを精度良く近似できるため、有限要素法解析などの直接積分法として有効であると言える。

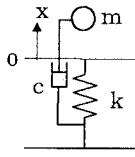


図-1 解析例1

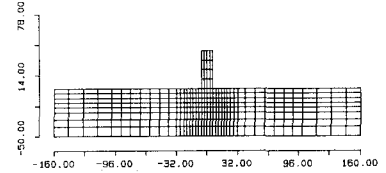


図-2 解析例

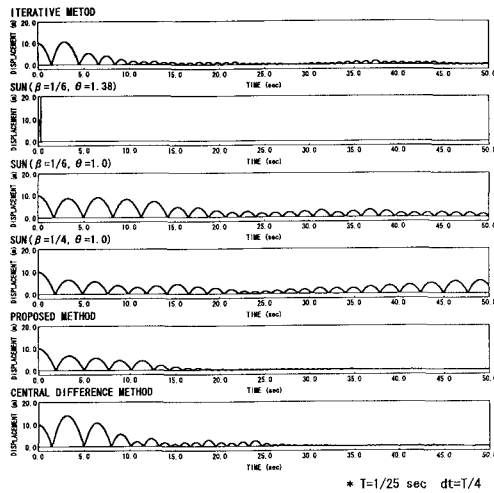
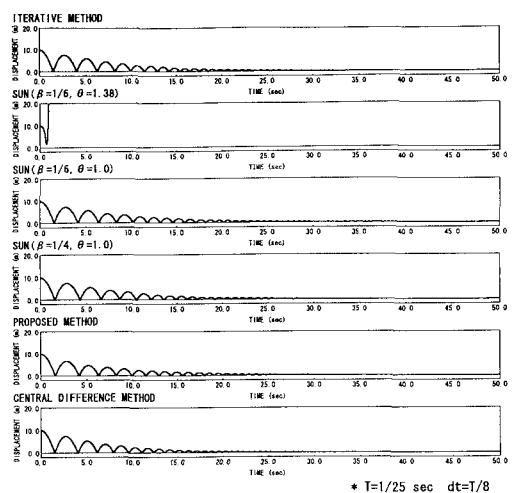
* $T=1/25$ sec $dt=T/4$ * $T=1/25$ sec $dt=T/8$

図-3 応答変位（解析例1）

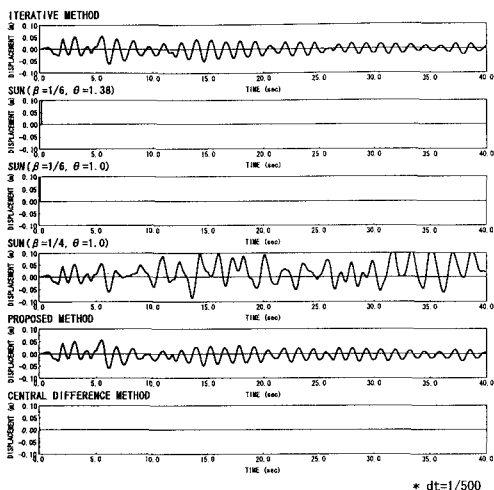
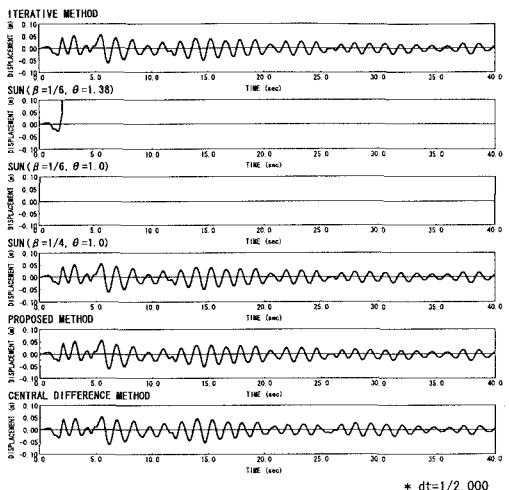
* $dt=1/500$ * $dt=1/2,000$

図-4 応答変位（解析例2）

参考文献

1) N. M. Newmark: A method of computation for structural dynamics, J. eng. mech. div. ASCE85 (EM3), 67-94, 1959 2) K. Sun and J. A. Pires: A post-correction integration algorithm for non-linear dynamic analysis of structures, Earthquake eng. struct. dyn. 20, 1083-1097, 1991