I－467　　三角波形動荷重の Duhamel 積分

ロック建設技術研究所　正会員　今　井　芳　雄

§1. 前言、動荷重（dynamic loading）$F(\tau)$が三角波形で正負繰返すいわゆるのこぎり歯型である時 $\int_{\tau=0}^{\tau=t} F(\tau)\,d\tau\cdot\sin\omega(t-\tau)$ は Duhamel 積分になるわけであるが $F(\tau)$ が τ の１次式の時は $\sin$ を展開することによって動的変位を手計算で求めることが出来るということである。

§2. 単振動

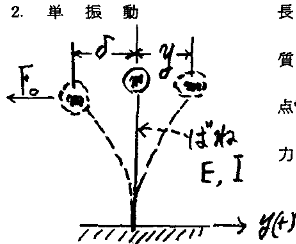


Figure 1.1

長さl断面２次率I弾性係数Eのばねに固定した質量m（重量$\div g$）の質点mを力F_0で$\delta=F_0\cdot l^3(3E\cdot I)^{-1}$で静止させてから$F_0$を断つと質点$m$はばね力を受けながら右方に運動する。動的変位$y$の時、質点は$K\cdot y$の力を左方に受けて次第に速度をおとす。加速度が左方にはたらくからである。

§3. 強制振動、Figure 1.1の質点mに時間τの１次関数の外力$F(\tau)$がτと共に変化して作用すると $K\cdot(-y)+F(\tau)=m\dfrac{d^2y}{dt^2}$ である　$\therefore m\dfrac{d^2y}{dt^2}+K\cdot y=F(\tau)$

である。この微分方程式の解は $y=y_0\cos\omega t+v_0\cdot\omega\cdot\sin\omega t$ によって進める、ここで $\omega=(K\cdot m^{-1})^{\frac{1}{2}}$, $K=F_0\{F_0\cdot l^3(3EI)^{-1}\}^{-1}=3EI\cdot l^{-3}$. ニュートンの運動法則から時間$\tau$の微分を$d\tau$として $F(\tau)\cdot d\tau=m\cdot dv$ $\therefore dv=m^{-1}\cdot F(\tau)\cdot d\tau$.　$F(\tau)$が連続して作用すれば時間t後の動的変位は、力の独立作用の原理から$d\tau$毎の変位の累積したものに等しくなる。時間t後の動的変位を$y_{(t)}$とすると

$$y(t)=y_0\cdot\cos\omega t+m^{-1}\cdot\omega^{-1}\int_0^t F(\tau)\cdot d\tau\cdot\sin\omega(t-\tau)\quad\text{---------}(2.1)$$

$$=y_0\cos\omega t+m^{-1}\cdot\omega^{-1}\left[\sin\omega t\int_0^t\{F(\tau)\cdot\cos\omega\tau\}d\tau-\cos\omega t\int_0^t\{F(\tau)\cdot\sin\omega\tau\}d\tau\right]\ (2.2)$$

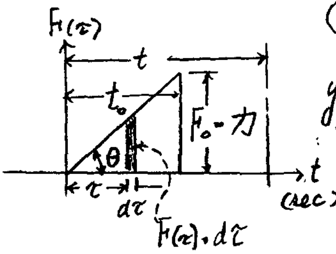
初期変位$y_0=0$とすれば $y_{(t)}=0+m^{-1}\cdot\omega^{-1}\int_0^t F(\tau)\cdot\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$

$=m^{-1}\cdot\omega^{-1}\int_0^t F(\tau)\{\sin\omega t\cdot\cos\omega\tau-\cos\omega t\cdot\sin\omega\tau\}d\tau$　この式でtはτに対し常数故積分の外に出て

$$= m^{-1}\cdot w^{-1}\left[\sin wt\int_0^t\{F(\tau)\cdot\cos w\tau\}\,d\tau - \cos wt\int_0^t\{F(\tau)\sin w\tau\}\,d\tau\right] \cdots(2.3)$$

τ の或時刻における $F(\tau)$ の作用効果の time, t にあらわれるものの累積であるから τ は任意でよいわけである。

§ 4. $F(\tau)$ が上り勾配（時間 τ と共に増加）に変化し y 方向に作用する場合



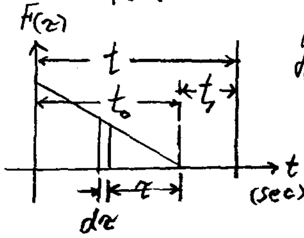
$(F_o=力)\cdot t_o^{-1}=\tan\theta$ とおいて $F(\tau)=\tau\cdot\tan\theta$

$$y_{(t)} = m^{-1}\cdot w^{-1}\cdot\tan\theta\left[\sin wt\int_0^{t_o}\tau\cdot\cos w\tau\,d\tau - \cos wt\int_{\tau=0}^{\tau=t_o}\tau\cdot\sin w\tau\,d\tau\right]$$

$$= m^{-1}\cdot w^{-2}\cdot\tan\theta\left[\sin wt\{w^{-1}(\cos wt_o-1)+t_o\sin wt_o\} - \cos wt\{w^{-1}\cdot\sin wt_o - t_o\cdot\cos wt_o\}\right] \cdots\cdots(3.1)$$

（3.1）式は任意の time, t における動的変位 $y_{(t)}$ を求めるものである。

§ 5. $F(\tau)$ が下り勾配に変化し y 方向に作用する場合

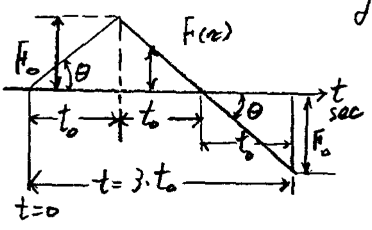


$$y_{(t)} = m^{-1}\cdot w^{-1}\left[\sin wt_1\int_{\tau=0}^{\tau=t_o}\tau\cdot\tan\theta_o\cdot\cos w\tau\,d\tau + \cos wt_1\int_{\tau=0}^{\tau=t_o}\tau\cdot\tan\theta_o\cdot\sin w\tau\,d\tau\right]$$

$$= m^{-1}\cdot w^{-2}\tan\theta_o\left[\sin wt_1\{w^{-1}(\cos wt_o-1)+t_o\sin wt_o\} + \cos wt_1\{w^{-1}\sin wt_o - t_o\cos wt_o\}\right] \cdots(4.1)$$

§ 6. $F(\tau)$ が三角波形３つの連らなる場合

（3.1）式（4.1）式の代数和として求める。動的変位を $y_{(t)}$ とおいて



$$y_{(t)} = m^{-1}\cdot w^{-2}\cdot\tan\theta\left[\sin w\cdot 3t_o\{w^{-1}(\cos wt_o-1) + t_o\cdot\sin wt_o\} + (-\cos w\cdot 3t_o + 2\cos wt_o)\times\{w^{-1}\cdot\sin wt_o - t_o\cos w\cdot t_o\}\right] \cdots(5.1)$$

§ 7. 結言、耐震の立場からみて、最大 gal $(cm\cdot sec^{-2})$ もさることながらその立ち上りまでの time の長短が最大変位 $y_{(t)}$ を大きく左右することである。即ち $F_o\times t_o^{-1}=\tan\theta$ の大小である。最大 gal の前後の秒数 t_o を１００分の１秒まで知れば足りる。固有振動周期 T を求める事が示方されているから $T\cdot W=2\pi$ から W が知り得る。