

I-417

弾性平面ひずみモデルにおける逆解析問題

東電設計(株) 正会員○小室 和之 東洋大学 正会員 新延 泰生  
(株)大東設計コンサルタント 正会員 榎本 覚雄

1. はじめに

感度解析は、任意の設計変数の単位変動に対する構造物の応答の変動(感度係数)を解析的に求めるものである。感度解析手法によれば、構造物の既知の応答量を基に、構造物の未知の剛性を推定することが可能である。これは、直接測定することが困難な物理量を推定する場合の有効な情報となる。すなわち感度解析は、通常とは逆の解析である逆解析問題に対する一つの解析手法となる。

本研究は、弾性連続体の感度解析理論を述べると共に、感度解析手法を用いた最小自乗法に基づく剛性の推定方法を提示し、その信頼性を検討するものである。

2. 感度解析手法

2-1 弾性連続体の感度解析

二次元弾性連続体の変位法による釣り合い方程式(状態方程式)は、次式で与えられる。

$$[k]\{v\} = \{R\} - \{F\}_p + \{F\}_b + \{F\}_{e0} + \{F\}_{\sigma0} \quad (1)$$

$[k]$ : 剛性マトリックス  $\{F\}_b$ : 連続体に作用する単位面積当たりの分布外荷重  
 $\{v\}$ : 変位ベクトル  $\{F\}_{e0}$ : 初期ひずみによる節点力  
 $\{R\}$ : 荷重ベクトル  $\{F\}_{\sigma0}$ : 初期応力によって生じる節点力ベクトル  
 $\{F\}_p$ : 連続体の物体力と等価な節点力

式(1)の右辺は荷重ベクトルのみを考え、両辺の第一変分をとると次式となる。

$$[k] \left\{ \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\} = [H] = - \left[ \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] \{v_j\} \quad (2)$$

式(2)の左辺の  $\{\partial v_j / \partial x_i\}$  が  $i$  要素の解析変数  $X_i$  の微小変動に対する各変位の変動量を示すものであり、 $i$  要素の解析変数  $X_i$  に対する各変位の感度係数を示している。

2-2 感度解析手法による剛性推定方法

$M$ 層の異なる地層の未知の剛性 $X_s$ を求める。既知な変位量 $\bar{v}_j$ は上層の測定点とする。剛性や測定変位等の初期条件を与えた状態で感度を求め、得られた各要素の測定点に関する感度を層ごとに加算する。

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_1} = \sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial x_s}, \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_2} = \sum_{s=2}^M \frac{\partial v_j}{\partial x_s}, \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_3} = \sum_{s=3}^M \frac{\partial v_j}{\partial x_s}, \dots \quad (3)$$

$j=1, 2, \dots, \ell$

感度係数特性より次式が得られる。

$$v_j = - \sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial X_s} X_s \quad s=1, 2, \dots, M \quad (4)$$

最小自乗法に基づき、剛性 $X_s$ を求めるための連立方程式をつくる。

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell} (\bar{v}_j - v_j)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell} \left( \bar{v}_j + \sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial X_s} X_s \right)^2 \quad (5)$$

式(5)を基に方程式を解き、剛性 $X_s$ を求める。

$$\frac{\partial Q}{\partial X_k} = \sum_{j=1}^{\ell} \left( \bar{v}_j + \sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial X_s} X_s \right) \left( \frac{\partial v_j}{\partial X_k} \right) = 0$$

$$\sum_{s=1}^M \left( \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial v_j}{\partial X_s} \frac{\partial v_j}{\partial X_k} \right) X_s = - \sum_{j=1}^{\ell} \bar{v}_j \frac{\partial v_j}{\partial X_k} \quad k=1, 2, \dots, M \quad (6)$$

収束条件を以下の様に設定し、収束判定を行う。

$$\left| \frac{X_s^{i+1} - X_s^i}{X_s^i} \right| \leq \epsilon \quad (7)$$

収束条件を満足しない場合は、解析で得られた剛性 $X_s$ を式(8)で補正し、新たな設計変数として再解析する。

$$X_s^{i+1} = X_s^i - (X_s^{i-1} - X_s^i) = X_s^i - \Delta X_s \quad (8)$$

図1に、逆解析問題の流れ図を示す。

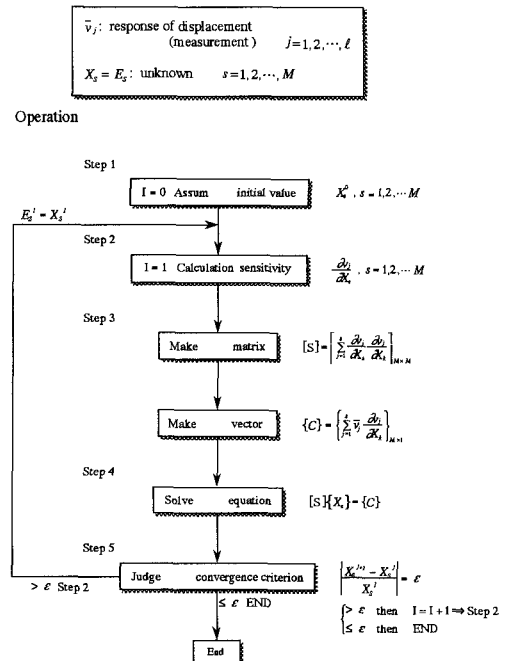


図1 剛性を推定するまでの流れ

収束した推定値は、与える測定データの精度に影響を受けるため測定データの信頼性に対応した推定値の信頼性を考える。収束した時点での式(6)右辺の $\bar{v}_j$ に単位値を与えて方程式を解けば各測定変位 $\bar{v}_p$  ( $p=1, 2, \dots, \ell$ )の単位変動に対する推定値の変動 $\partial X_s / \partial \bar{v}_p$ が近似的に得られる。

$$\sum_{s=1}^M \left( \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial v_j}{\partial X_s} \frac{\partial v_j}{\partial X_k} \right) \frac{\partial X_s}{\partial \bar{v}_p} = - \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{v}_p} \frac{\partial v_j}{\partial X_k} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{v}_p} = \begin{cases} 1 & (j=p) \\ 0 & (j \neq p) \end{cases}$$

式(9)より得られる $\partial X_s / \partial \bar{v}_p$ に測定変位 $\bar{v}_p$ を掛け、 $X_s$ で除すれば推定値の信頼性の指標となる無次元化された値が得られる。

$$C = \frac{\partial X_s}{\partial \bar{v}_p} \frac{\bar{v}_p}{X_s} \quad (10)$$

### 3. 解析例（地層モデル）

図2に示すような3層の異なるヤング係数 $X_s = E_s$ （上層部：1000tf/m<sup>2</sup>、中層部：1500tf/m<sup>2</sup>、下層部：2000tf/m<sup>2</sup>）を持つ39節点48要素の平面ひずみ問題に対して、表層部の節点5に集中鉛直荷重 $P=2.000$ tfを載荷したモデルを考える。既知数となる測定変位は、上記のヤング係数で通常の構造解析を行って設定する。問題としては、設定した測定変位を既知数として未知数である各層のヤング係数を逆解析により同定することである。なお、収束条件は $\epsilon=0.01$ とした。

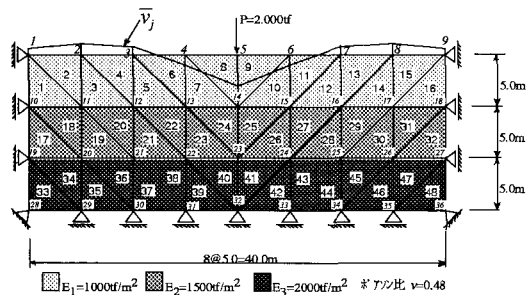


図2 地層モデル

まず、測定変位に測定誤差が全くない場合を考える。この場合、測定変位の個数は推定する層数以上あれば、推定結果は正解に一致し、収束に要する解析回数は2回（収束判定に1回要する）となる。つまり3点以上の測定変位を与えても推定結果、収束回数は変わらない。

次に、測定変位が誤差を持つ場合の推定結果に与える影響をみるために、各測定変位にそれぞれ1%の誤差を与えてヤング係数を推定し、正解値に対する推定誤差を図3に示す。図3は例えば測定点5の変位だけに1%の誤差があった場合に推定されるヤング係数は第1層目では1.43%、第2層目では0.91%、第3層目では2.16

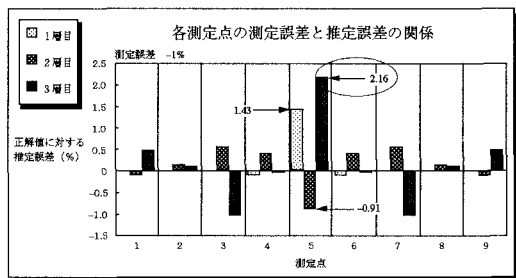


図3 測定位置と推定精度の関係

%の誤差を持つことを表している。ここで、式(10)で得られる推定値の信頼性を、各測定点に対し表したものが図4である。この信頼性の値に測定データの信頼性（誤差）を掛けたものが、推定されたヤング係数の持つ誤差を表している。例えば測定点5に1%の誤差が与えられれば、推定された第3層目のヤング係数の誤差は

$C \times (-0.01) = -2.12 \times (-0.01) = 0.0212$  (2.12%)  $\approx 2.16\%$  となり、図3で示した推定誤差にほぼ一致する。

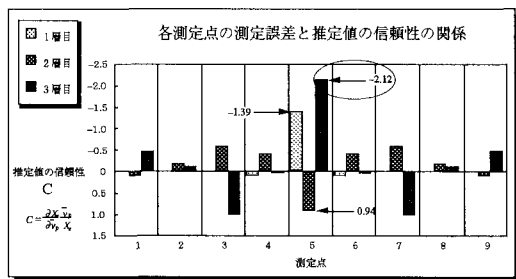


図4 推定値の信頼性

測定変位に誤差がある場合、その誤差の大きさにより推定誤差と収束回数に影響を受ける。測定点5の測定変位に±1%あるいは±5%の誤差を与えて推定を行うと、測定個数3点では収束しないが、測定個数を増やすにしがって収束し、推定誤差が減少する傾向が確認できた。また、同一の測定誤差であれば測定個数を増やしても収束に要する解析回数はほぼ一定であるが、測定誤差が大きくなると収束に要する解析回数は増加することも確認している。

### 4. おわりに

感度解析手法を用いた最小自乗法に基づく剛性の推定方法を示した。測定の応答量に信頼性があれば、精度の良い解析が可能である。今後は解析の精度を向上させるために解析変数の逆数で定式化を行い、検討を加える予定である。

（参考文献）

- 1) 新延泰生、松井邦人、菊田征勇：  
骨組構造物の応答感度係数の特性、土木学会論文集、1992.7
- 2) O.C.Zienkiewicz著（吉識雅夫、山田昭監訳）培風社  
基礎工学におけるマトリックス有限要素法