Ｉ－408　斜張橋主ケーブルの最適プレストレス力設計への一提案

岐阜大学　大学院　学生員○中村俊文
瀧上工業株式会社　正　員　高木録郎
岐阜大学　工学部　正　員　中川建治

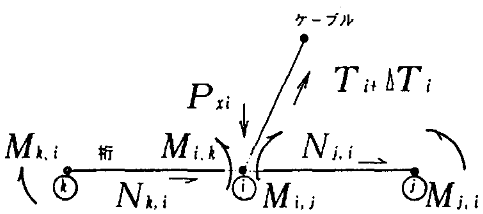
1:はじめに

斜張橋の主ケーブルに対する最適プレストレス力の設計法には幾つかの手法や理論が発表されている。本稿ではケーブルプレストレス力をランダムな統計量という形で表現し、その統計量が一定という条件のもとで目的とする構造物の応答値が極値をもつように設計する最適化手法を提案する。統計量としては初期設定プレストレス力と最適プレストレス力との残差の自乗和をとり、この値をあらかじめ一定とする拘束条件を設ける。最適化とは構造部材に生じる縁応力度の自乗和を最小化（均一化）することと定義して、ラグランジェの未定係数法による変分問題として解く最適設計手法を説明し、簡単な計算例と合わせて紹介する。

2:基本的考え方

ランダムな外力を平均、分散という統計量の形で表現し、それらが指定するある値となる範囲内で構造物の応答が極値（最大値、最小値）になるような外力配列を求めることは意義あることである。すなわち、統計量という形で規制されたランダム外力をその範囲内で任意の荷重配列として載荷して応答値を極値化するのである。この設計法は従来の設計法の流れといささか異なるが安全な構造設計をすることになろう。

本稿で紹介する斜張橋主ケーブルの最適プレストレス力の設計では、応答値として主桁や主塔に作用する縁応力度に着目して、それが平均化（作用荷重による縁応力度自乗和　$\Sigma\sigma_{ij}{}^2$が最小化）されるように主ケーブルに導入する最適なプレストレス力配分を求める。これは主桁に着目すれば、プレストレス力により断面力が改善されることを意味する。求めるプレストレス力は初期設定値より多少の変動を許されたランダムな外力として扱われている。作用する荷重（死、活荷重）は、各部材で最大の縁応力度を持つように設定されている。



図－１　部材力と作用力

一般に、着目点各部分の縁応力度は各々の外力荷重｛P｝とプレストレス力｛T_p｝とにより次のようにベクトル表示される。

$$\sigma = B_3\{N\} = B_3 C^{T-1}\{P\} + B_3[C^{T-1}B_1 + B_2]\{T_P\} = \dot{B}_4\{P\} + B_5\{T_P\} \tag{1}$$

上式で、$B_3\{N\} = \begin{bmatrix} 1 & -Y_U & 0 \\ 1 & Y_L & 0 \\ 1 & 0 & Y_U \\ 1 & 0 & -Y_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/A & 0 & 0 \\ 0 & 1/I & 0 \\ 0 & 0 & 1/I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & L/2 & -L/2 \\ 0 & L/2 & L/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -N_{ij} \\ (M_{ij}+M_{ji})/L \\ (M_{ij}-M_{ji})/L \end{bmatrix}$ である。

ここに、B_1、B_2：プレストレス力を分力表示するための係数行列、C：部材結合を表す幾何形状行列、$P=\{P_{X1}、P_{Y1}、P_{X2}、P_{Y2}、\cdots\}^T$：外力荷重項、$T_P=\{\Delta T_1、\Delta T_2、\Delta T_3、\cdots\}^T$：プレストレス力項を示すものとする。したがって、部材縁応力度σの自乗和は

$$\Sigma\sigma_{ij}{}^2 = \mathrm{Trace}\ [\ (P^T B_4{}^T + T_P{}^T B_5{}^T)\ \ (B_5 T_P + B_4 P)] \tag{2}$$

と表現される[1]。また、Trace［matrix$H$］は行列Hの対角要素和を表わす。

上式(2)の極値問題は最適ケーブルプレストレス力 ΔT_i が初期設定プレストレス力 T_{0i} との残差の自乗和 $[\Sigma\omega_i(\Delta T_i - T_{0i})^2 = V]$ を一定とする条件のもとにラグランジェの未定係数法で解決される。すなわち、パラメータ ε を用いて、

$$J = \Sigma\sigma_{ij}^2 - \varepsilon\,(\Sigma\omega_i(\Delta T_i - T_{0i})^2 - V) \tag{3}$$

を極値化することになる。

3:最適解への解法

上式(2)の極値は、(3)式を微分することで変分問題として扱われる。

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta T_i} = \frac{\partial}{\partial \Delta T_i}\left\{\mathrm{Trace}\left[(P^T B_4{}^T + T_P{}^T B_5{}^T)(B_5 T_P + B_4 P) - \varepsilon\,(\Sigma\omega_i(\Delta T_i - T_{0i})^2 - V)\right]\right\} = 0 \tag{4}$$

すなわち、すべての主ケーブルに対して(4)式が計算され、ベクトル表示すると

$$[\beta_{ij}]\{\tau_i\} - \varepsilon\{\omega_i\}\{\tau_i\} = \{\gamma_i\} \tag{5}$$

となり、固有値問題となる。

ここで、$[\beta_{ij}]$: B_5, B_5行列要素の内積行列、$[\omega_i]$: 重み係数を含む対角行列、$\{\tau_i\}$: 残差（$\Delta T_i - T_{0i}$）を含む行列、$\{\gamma_i\}$: 外力および初期設定プレストレス力を含む係数行列 である。

解 $\{\tau_i\}$ が未知量 $\{\zeta_i\}$ と固有ベクトル $[\xi_{ij}]$ との積で表されるものとして、重み行列 $[\omega_i]$ をもって直交する行列を用いて、行列 $[\beta_{ij}]$ の固有値を $[\mu_i]$ とするならば、(5)式から

$$\{\zeta_i\} = \left\{\frac{\delta_i}{\mu_i - \varepsilon}\right\} \tag{6}$$

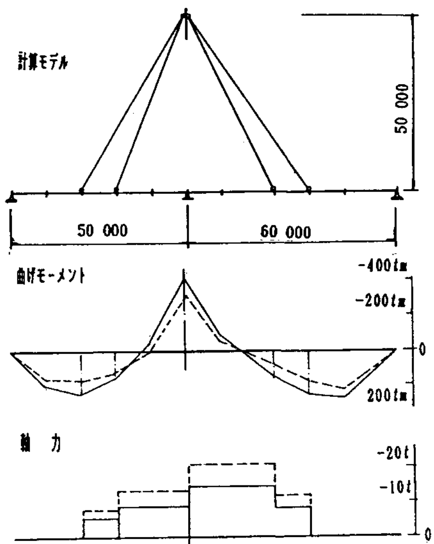
が得られる。上式において、$\delta_i (= \xi_{ij}{}^t \gamma_i)$、$\mu_i$ は既知量であり、未知数パラメータ ε について解くには、拘束条件（$\Sigma\omega_i\tau_i{}^2 = V$）に代入することで 2次分数式の和の解としてNewton-Raphson法で求められる。最終的には、最適プレストレス力ΔT_iは

$$\{\Delta T_i - T_{0i}\} = [\xi_{ij}]\{\zeta_i\} \tag{7}$$

から計算される。

4:理論応用例

本稿で紹介した設計手法を簡単な設計例で示してみたのが図－2である。設計モデルは主塔を省略したケーブルを左右非対象に複数有する 2径間連続斜張橋である。主桁に固定荷重（死荷重相当）が作用した場合の主桁やケーブルの応力度自乗和が最小（縁応力度の平均化）となるような最適なケーブルプレストレス力を設計した結果を主桁断面力結果で示した。計算結果からケーブルプレストレス力により曲げモーメントが改善されたのが理解できる。本手法は主桁のみのように特定部材に着目した縁応力度の平均化についての最適プレストレス力設計も可能である。また、現場での最適導入プレストレス管理としてのシム調整計算にも拘束条件を変更することで応用できる。なお、計算を進めるにあたり、骨組解析における行列の演算手法は著者等の研究の一環であり、詳細は割愛する[2]。



応力度自乗和 $\Sigma\sigma^2$ 調整前 3.673E9 調整後 7.483E8
ΔT_i 5.8t, 6.4t, 14.1t, 11.1t
注：実線はプレストレス導入前断面力、破線は同導入後断面力

図－2 計算例（主桁断面力比較）

参考文献：(1) R.Takagi et al.:A Proposal of Design Technique for Optimum section with Average Stress throughout Frame Structure, Computers & Structures 投稿中

(2) 高木録郎 他：骨組構造物の最適設計法に対する解析手法の一提案、構造工学における数値解析シンポジュウム論文集17巻p445~446、1993.7