

I-331 損傷を考慮した連続体モデルによる材料非線形問題の数値解析

法政大学大学院 学生員 酢谷 郁雄
法政大学計算センター 正 員 武田 洋

1. はじめに 連続体モデルの数値実行が有効に働くことができるならば、現在のところ現象論的モデルは損傷材料の数値的なモデル化と解析に対しては最もよい選択であると言える。本論文において、ひずみと損傷が連成した構成方程式に対する材料非線形問題の一般的な有限要素の定式化を行う。また、構成方程式を積分するための数値スキームを提案し、その際この方法において適応型接線剛性テンソルを導入し、その結果、大きな荷重増分による計算が可能であるか安定性と精度について検討する。

2. ひずみと損傷の連成した構成方程式 降伏関数は $F_L = \bar{\sigma} - R - \sigma_Y$ として定義される。ここで $\bar{\sigma}$ は相当応力、 R は等方硬化応力変数であり、 σ_Y は降伏応力である。相当応力 $\bar{\sigma}$ は次式で定義される。

$$\bar{\sigma} = \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\sigma'_{ij}}{1-D} - \alpha'_{ij} \right) \left(\frac{\sigma'_{ij}}{1-D} - \alpha'_{ij} \right) \right]^{1/2} \quad (1)$$

ここで σ'_{ij} は偏差応力テンソル、 α'_{ij} は偏差背応力テンソル、 D は損傷変数である。ポテンシャル成分である F_D は $\dot{D} = (\partial F_D / \partial \gamma) \dot{\lambda}$ として表現される。ここで γ はひずみエネルギー密度解放率である。

塑性の場合、塑性乗数は適合条件から導くことができる。

$$\dot{F}_L = \frac{\partial F_L}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F_L}{\partial \alpha'_{ij}} \dot{\alpha}'_{ij} + \frac{\partial F_L}{\partial D} \dot{D} + \frac{\partial F_L}{\partial R} \dot{R} = 0 \quad (2)$$

最終的に次式が誘導される [1]。

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{3}{2} (\dot{\sigma}'_{ij} - \dot{\alpha}'_{ij}) \dot{\sigma}_{ij}}{\bar{\sigma}(1-D) \left[\alpha_{\infty} \gamma - \frac{3}{2} \frac{(\dot{\sigma}'_{ij} - \dot{\alpha}'_{ij})}{\bar{\sigma}} \left(\gamma \alpha'_{ij} + \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{1-D} \frac{\partial F_D}{\partial \gamma} \right) + b(R_{\infty} - R) \right]} \quad (3)$$

ここで γ は非線形弾動硬化材料パラメーター、 R_{∞} は等方硬化材料パラメーター、 b は等方硬化材料成分、 $\dot{\sigma}'_{ij}$ は $\dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij} / (1-D)$ とする有効応力テンソル成分である。

3. 速度型の応力-ひずみ関係 ひずみ速度の項における応力速度を決定する陽的な表現は次式のようにになる。

$$\{\dot{\sigma}\} = \left[\frac{[E] - \frac{[E]\{N\}\{N_D\}^T[E]}{A + \{N_D\}^T[E]\{N\}} \right] \{\dot{\varepsilon}\} \quad (4)$$

ここで $\{N\}$ は応力による散逸ポテンシャル関数の微分項で、 $\{N_D\}$ は降伏関数の微分項である、 A は次式で与えられる。

$$A = \left[\alpha_{\infty} \gamma - \frac{3}{2} \frac{(\dot{\sigma}'_{ij} - \dot{\alpha}'_{ij})}{\bar{\sigma}} \left(\gamma \alpha'_{ij} + \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{1-D} \frac{\partial F_D}{\partial \gamma} \right) + b(R_{\infty} - R) \right] \quad (5)$$

4. 有限増分型の応力-ひずみ関係 $\Delta\{\varepsilon\} - [E]^{-1} \Delta\{\sigma\} - [(1-\theta)\{N\}_i + \theta\{N\}_{i+1}] \Delta\lambda = 0$ と $i+1$ における適合条件式 $(F_L)_{i+1} = 0$ の連立方程式を解くことにより応力増分 $\Delta\{\sigma\}$ と塑性乗数増分 $\Delta\lambda$ を決定できる。ニュートン・ラフソン法は以下の式で表せる。

$$\Delta\{\sigma\} = \sum_k \Delta\Delta\{\sigma\}^{(k)} \quad \Delta\lambda = \sum_k \Delta\Delta\lambda^{(k)} \quad (6)$$

ここで添字 (k) は繰り返し回数を意味する。

$$\left[\begin{array}{cc} \Xi^{-1} & N \\ N_D^T & -A \end{array} \right]_{i+1}^{(k)} \left\{ \begin{array}{c} \Delta\Delta\sigma \\ \Delta\Delta\lambda \end{array} \right\}^{(k)} = \left\{ \begin{array}{c} R_e \\ F_L \end{array} \right\}_{i+1}^{(k)} \quad (7)$$

ここで $[\Xi]$ は適応型接線剛性テンソル [2] であり、それは次のように示される。

$$[\Xi] = \left[[E]^{-1} + \Delta\lambda^{(k)} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2} \right] \right]^{-1} \quad (8)$$

またひずみ残差ベクトル成分 R_e は以下の式で計算される。

$$R_e = \Delta\{\varepsilon\} - [E]^{-1} \Delta\{\sigma\}^{(k)} - [(1-\theta)\{N\}_i + \theta\{N\}_{i+1}^{(k)}] \Delta\lambda^{(k)} \quad (9)$$

5. 誤差解析 荷重増分に相当するアイソ・エラー・マップによって弾塑性性に対するアルゴリズムの精度試験の統一的な解法を示す。この方法は多くの人々によって行われている。現在そのような背景から以下示すような方法で行う。

応力の可能な状態の範囲を表現する降伏面の3つの点を選ぶ。図1に示してある3点A,B,Cはそれぞれ単軸、二軸、そして純せん断状態に相当する。アイソ・エラー・マップを描くために、降伏面上の選んだ点に対して標準化したひずみ増分の連続を考える。この方法で行われたひずみの状態に相当する応力はその時アルゴリズムの実行によって計算される。それぞれの点においての標準的パラメータは初期の降伏に関連した弾性ひずみとして選ばれる。一般性を失わないように計算はひずみと応力テンソルの主値の項において行う。すなわち、 $\varepsilon_{12} = 0$ とする。結果は以下の式に示すように厳密解と計算値との誤差を計算して評価する。

$$\delta = \frac{\sqrt{[(\sigma - \sigma^*) : (\sigma - \sigma^*)]}}{\sqrt{(\sigma^* : \sigma^*)}} \times 100 \quad (10)$$

ここで σ は計算から求められたもので、 σ^* はひずみの増分量をかなり細かくしたもので、これを厳密解とする。

点A,B,Cに相当するアイソ・エラー・マップは図2-4にそれぞれ示す。ここで示した値は von Mises の降伏規準のものでポアソン比は0.3である。降伏面の点Bと点Cは図3、4において期待通り対称性を示した。他のリターン・マッピング・アルゴリズムに対する論文に報告されたものと同様十分な誤差レベルの値を得ることができた。

6. おわりに 本論においてダメージ材料に対する完全構成モデルを連続体理論の枠組み内で開発を行った。また構成方程式を積分するための数値スキームを提案した。この方法により適応型接線剛性テンソルを導入することにより高い安定性を保持し、大きな荷重増分を可能にした。このことによって材料非線形問題に対する実際上の数値解析に役に立つと思われる。今後、金属材料やコンクリート材料などの材料非線形問題に実際に適用することが望まれる。

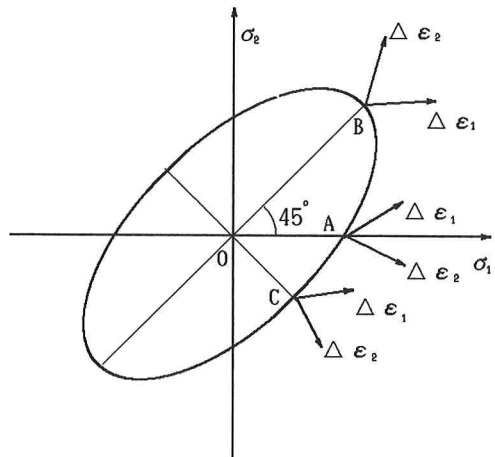


図1 平面応力状態の降伏曲面

[参考文献] 1) J. Lemaitre, *A course on Damage Mechanics*, Springer-Verlag, (1992). 2) J.C. Simo and R.L. Taylor, Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, **48**, 101-118 (1985). 3) I. Suya and H. Takeda, Computational analysis of material nonlinear problems by continuum damage mechanics, *Non-linear analysis and design for shell and spatial structures.*, 85-88 (1993).

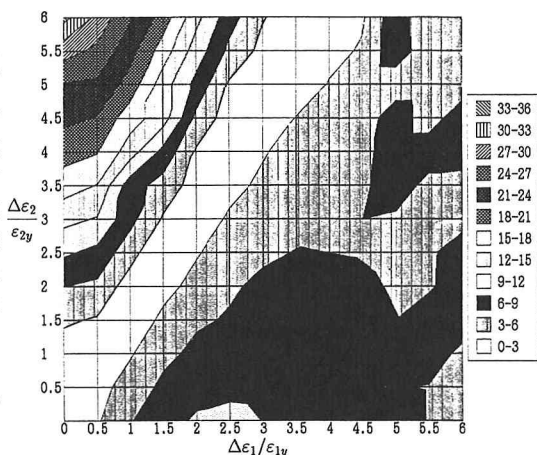


図2 降伏曲面上のA点に相当するアイソエラーマップ

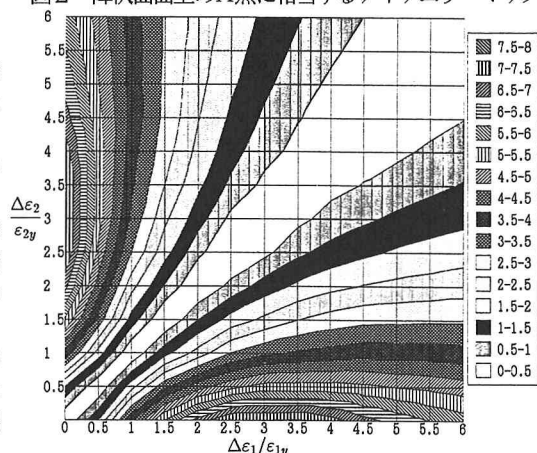


図3 降伏曲面上のB点に相当するアイソエラーマップ

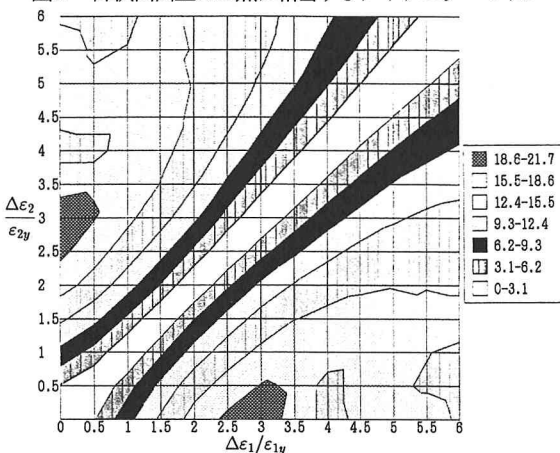


図4 降伏曲面上のC点に相当するアイソエラーマップ