I－330　長方形板の分岐階層構造に関する研究

N　K　K　○正　員　和知　聡
東北大学工学部　正　員　中沢正利
東北大学工学部　正　員　池田清宏
関東学院大学工学部　正　員　倉西　茂

1.　はじめに

近年構造工学の分野でも、群の表現論を用いて構造物の分岐現象を記述する研究が行われるようになってきている[1),2),3)]。軸対称系 (円の対称性を表す群 D_∞または正 n 角形の対称性を表す群 D_n に同変な系) に関しては詳細な研究が行われており、分岐ダイヤグラム[2)]、離散系の接線剛性行列のブロック対角化法[1),3)]等が提案されている。分岐ダイヤグラムにより分岐のしくみが先験的に分かることは数値解析上有利であり、また対称構造物の接線剛性行列を適当な座標変換によりブロック対角形に変換することには、数値解析の効率と安定性の向上という利点がある。本研究では、単純支持された弾性矩形板の分岐問題に対して、群の表現論に基づくブロック対角化法を適用する。この板の分岐解析を行い、本理論が D_∞に同変な系の分岐構造に従うことを示し、本理論の妥当性を検証する。

2.　つり合い方程式の群共変性

鏡映と回転対称性を持つ、D_∞同変系な板の非線形つり合い方程式 $\mathbf{F}(f,\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ を、あるつり合い点 $(f,\mathbf{u})$ の近傍で増分形に書き直せば、

$$\mathbf{F} = J\mathrm{d}\mathbf{u} + \mathbf{F}_0(\mathrm{d}f, \mathrm{d}\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

となる。ここに、f は荷重パラメータを、$\mathbf{u}$ は変位ベクトルを表す。また、$J = \partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{u}$ は接線剛性行列、$\mathbf{F}_0$ はある非線形ベクトルである。この板のつり合い式の共変性は、

$$T(g)\mathbf{F}(f,\mathbf{u}) = \mathbf{F}(f, T(g)\mathbf{u}),\ g \in D_\infty$$

により表される。ここに、$T(g)$ は、変換元 g が作用する座標変換のしくみを行列表示したもので、表現行列と呼ばれる。群 D_∞の既約表現全体は

$$R(D_\infty) = ((1,1)_{D_\infty}, (1,2)_{D_\infty}, (2,1)_{D_\infty}, (2,2)_{D_\infty}, \cdots)$$

と表される。つり合い方程式を各既約表現毎に分解する座標変換行列を

$$\begin{aligned} H &\equiv [\cdots, H^{\mu}, \cdots] \\ &= [H^{(1,1)_{D_\infty}}, H^{(1,2)_{D_\infty}}, H^{(2,1)^{+}_{D_\infty}}, H^{(2,1)^{-}_{D_\infty}}, H^{(2,2)^{+}_{D_\infty}} H^{(2,2)^{-}_{D_\infty}}, \cdots] \end{aligned}$$

と定義する。ここに、$H^{(1,j)_{D_\infty}}$ は1次既約表現 $(1,j)_{D_\infty}$ に対応する部分ブロック行列を、$H^{(2,j)^{+}_{D_\infty}}$ と $H^{(2,j)^{-}_{D_\infty}}$ は2次既約表現 $(2,j)$ に対応する部分ブロックをそれぞれ表す。この座標変換行列 H を用いると、剛性行列を

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= H^T J H = \mathrm{diag}[\cdots, \tilde{J}^{\mu} \cdots] \\ &= \mathrm{diag}\left[\tilde{J}^{(1,1)_{D_\infty}}, \tilde{J}^{(1,2)_{D_\infty}}, \tilde{J}^{(2,1)_{D_\infty}}, \tilde{J}^{(2,1)_{D_\infty}}, \tilde{J}^{(2,2)_{D_\infty}}, \tilde{J}^{(2,2)_{D_\infty}}, \cdots\right] \end{aligned}$$

とブロック対角化できる。ここに、diag$[\cdots]$ はブロック対角行列を表す。

3.　分岐階層構造のダイヤグラム

ある群に同変な系は分岐に伴い対称性を階層的に喪失することが知られている[2),4)]。この種の分岐現象には、群の連鎖構造が対応する。本研究で対象としている板は D_∞不変な系であり、この系の $D_\infty \to D_n \to \cdots \to C_1$ という分岐階層構造に着目する。ここに、$D_\infty \to D_n$ は D_∞不変な解から D_n 不変な解が分岐することを示す。この式はこの系の対称性が D_∞不変な状態から、最終的には非対称モードを表す C_1 へと低下して行くことに対応している。また、上式の D_∞は円の対称性を表す群であり、$D_\infty \equiv \langle s, r(\varphi)\rangle$ と定義される。式中の $\langle\ \ \rangle$ は括弧内の要素から生成されることを示し、s はある鏡映、$r(\varphi)$ は反時計回りの $\varphi(0 \le \varphi < 2\pi)$ の回転であ

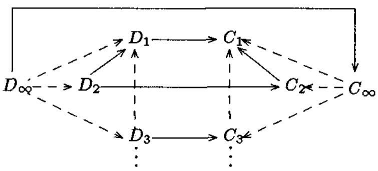
る。また、$D_n \equiv \langle s, r(2\pi/n)\rangle$は正 n 角形状の系の対称性を表す二面体群である。D_n 以下の部分に現れる、D_n の部分群は

$$D_m^j \equiv \langle r(2\pi/m), sr(2\pi(j-1)/m)\rangle, \quad j = 1, \cdots, m-1$$

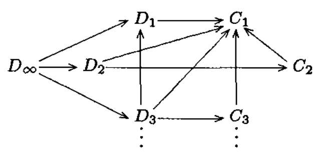
$$C_m \equiv \langle r(2\pi/m)\rangle$$

と定義できる。ここで $D_m = D_m^1$,$C_1 = \langle 1\rangle$とし、位数 m の二面体群 D_m^j は m 本の線対称軸を持つ線対称性を、巡回群 C_m は角度 $2\pi/m$ に対する回転対称性を、C_1 は非対称モードをそれぞれ表す。

これらの群をそれぞれ調べて行くことにより、群に同変な系の分岐階層構造が数値解析に先立ち先験的に求まるのである。これを示したものが図−1である。図中の実線は単純分岐点に、破線は(群論的) 2 重分岐点に対応する分岐プロセスをそれぞれ示す。この分岐ダイヤグラムは、系の幾何学的対称性から求められたものであるが、本研究で対象で用いている板の境界条件を考慮すれば図−2のような退化したダイヤグラムが得られる。このように、この 2 図は退化のしくみを考慮することの重要性を物語っている。



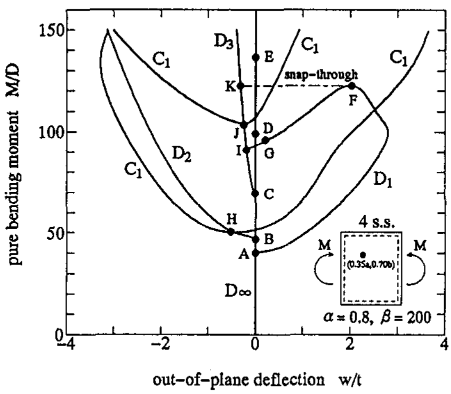
図−1 一般的な場合のダイヤグラム



図−2 退化した場合のダイヤグラム

4. 単純支持された矩形板の分岐解析

支配方程式として von Kármán の式を用い、分岐解析を行った結果を図−3に示す(数値解析の詳細については文献5)を参照されたい)。横軸は $(x, y) = (0.35a, 0.70b)$ における面外たわみを、縦軸は曲げモーメントをそれぞれ示す。図中に分岐経路の対称性を明記し、特異点を (•) で示す。自明解 $w = 0$ から、D_1, D_2, D_3 不変な解が分岐点 A, B, C からそれぞれ分岐している。D_3 不変な経路上の分岐点 I でさらに D_1 不変な経路が枝分れし、主経路から枝分れしてきた別の D_1 不変な経路とつながっている。また D_2 不変な経路上の分岐点 H と D_3 不変な経路上の分岐点 J からは C_1 不変な経路がそれぞれ分岐している。これらの C_1 不変な経路は対称性を完全に失っているので、これらの経路からはもはや分岐できない。このように一見非常に複雑な分岐のしくみも、すべて図−2に示した分岐ダイヤグラムに従っており、本理論の先験性と妥当性を示しているのが分かる。



図−3 つり合い経路図

参考文献

1) Healey, T.J.: A group theoretic approach to computational bifurcation problems with symmetry, *Computer Methods Applied Mech. Engng*, 67, pp.257-295, 1988.
2) Ikeda, K., Murota, K., and Fujii, H.: Bifurcation hierarchy of symmetric structures, *Int. J. Solids Structures*, 27(12), pp.1551-1573, 1991.
3) Ikeda, K., and Murota, K.: Bifurcation analysis of symmetric structures using block-diagonalization, *Computer Methods Applied Mech. Engng*, 86(2), pp.215-243, 1991.
4) Golubitsky, M. and Schaeffer, D.G.: Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vol. 1, Springer, Berlin, 1985.
5) Nakazawa, M., Iwakuma, T., Kuranishi, S., and Hidaka, M.: Instability phenomena of a rectangular elastic plate under bending and shear, *Int. J. Solids Structures*, 30(20), pp.2729-2741, 1993.