I - 329 境界および荷重条件を統一的に考慮した矩形板の曲げ解析手法

東北大学工学部　正員　中沢　正利
木更津工業高等専門学校　正員　佐藤　恒明
関東学院大学工学部　正員　倉西　茂

1. まえがき

横荷重を受ける矩形板の曲げ解析手法として，支配微分方程式から出発する解法では，板の境界条件ごとに異なる研究者が異なる変位関数を仮定しているのが現状であった．しかし，近年の著者らの研究[1)]の様に，板の二次元問題に対する変位関数でも，変数分離型を前提条件とすることにより，一次元的なはりの変位関数をそのまま使用することができ，かつ一般的に自由端以外の境界条件のほとんどを統一的に扱うことが可能である．本報告では，上述のアイデアを矩形板の曲げ解析にも適用し得ることを理論的に示すとともに，一対辺が単純支持の場合で，他対辺が一端単純支持と他端自由，すなわち言い換えると三辺単純支持，一辺自由境界条件の場合には，自由端を含む場合でも本手法が適用可能なことを数値例とともに示す．

2. 理論の概略

板曲げの支配微分方程式は，たわみを $w(x,y)$，板の曲げ剛性を D，分布荷重項を $q(x,y)$ とすると

$$\nabla^4 w(x,y) = q(x,y)/D \qquad (1)$$

と表わされる．よって，たわみ $w(x,y)$ は板周辺での境界条件を満足するとともに $\nabla^4 w(x,y)=0$ の斉次解でもある必要がある．$\nabla^4 w(x,y) = q(x,y)/D$ を満たす特解は荷重の分布形に依存するため，ここでは考えない．この時，$w(x,y) = X(x)\cdot Y(y)$ と変数分離できるためには，たとえば $X'''' = \lambda^4 X$, かつ $X'' = -\lambda^2 X$ の関係があればよいことが知られている[2)]．ここで $(\ )' = \partial(\ )/\partial X$ であり，λ はある係数である．これらの式より，

i) はりの曲げ自由振動の微分方程式

$$X'''' - \lambda^4 X = 0, \qquad \therefore X = c_1 \sin\lambda x + c_2\cos\lambda x + c_3 \sinh\lambda x + c_4\cosh\lambda x \qquad (2)$$

ii) はり・柱の座屈微分方程式

$$X'''' + \lambda^2 X'' = 0, \qquad \therefore X = d_1 \sin\lambda x + d_2 \cos\lambda x + d_3 \lambda x + d_4 \qquad (3)$$

の二つの関数形が X 方向に関して定義され，またこの時 Y 方向に関しては，

$$\ddddot{Y} - 2\lambda^2 \ddot{Y} + \lambda^4 Y = 0, \qquad \therefore Y = e_1 \sinh\lambda y + e_2\cosh\lambda y + e_3\cdot y\cdot\sinh\lambda y + e_4\cdot y\cdot \cosh\lambda y \qquad (4)$$

となる．ここで $(\dot{\ }) = \partial(\ )/\partial Y$ である．この様に，x, y 辺での境界条件は各係数 $c_1 \sim e_4$ を適宜変えることによって表現され，一般に自由端以外は x, y 方向独立にこれらの係数が決定できるので，任意の組み合わせ，すなわち統一的な考慮が可能である．また，図-1に示す様に，$x = 0, a$ で単純支持の場合には (2), (3) 式とも $X = \sin\lambda x$ となり，さらに $y = 0$ で単純支持，$y = b$ で自由端（すなわち，三辺単純支持，一辺自由）の場合にも本手法で解ける．この境界条件を満たす変位関数は (2),(3),(4) の関係より次の様に具体的に求められる．

i) $$w(x,y) = t\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\left[\sin\left(\frac{\alpha_n y}{b}\right) + \xi(m,n)\sinh\left(\frac{\alpha_n y}{b}\right)\right] \qquad (5)$$

ここで，$$\xi(m,n) = \frac{(\alpha_n/b)^2 + \nu(m\pi/a)^2}{(\alpha_n/b)^2 - \nu(m\pi/a)^2}\cdot\frac{\sin(\alpha_n)}{\sinh(\alpha_n)}$$

ii) $$w(x,y) = t\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\left[\sin\left(\frac{\beta_n y}{b}\right) - \zeta(m,n)\left(\frac{\beta_n y}{b}\right)\right] \qquad (6)$$

ここで，$$\zeta(m,n) = \frac{(\beta_n/b)^2 + \nu(m\pi/a)^2}{\nu(m\pi/a)^2}\cdot\frac{\sin(\beta_n)}{\beta_n}$$

ここで，α_n, β_n は各々の固有関数であり，t は板厚である．この時のひずみエネルギー U および外力仕事 V は

$$U=\frac{D}{2}\int\int\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\nu)\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}\right]dxdy \quad\cdots\cdots\cdots (7\text{-a})$$

$$V=-\int\int q(x,y)w(x,y)dxdy \quad\cdots\cdots\cdots (7\text{-b})$$

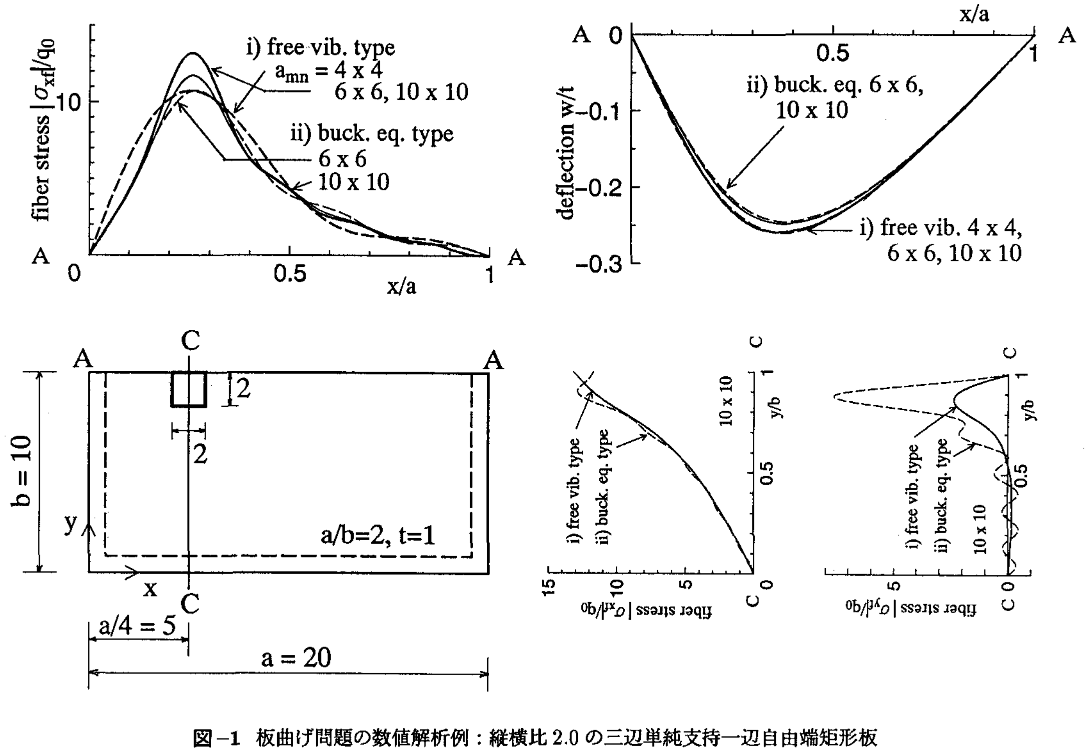
で表わされ，$\partial(U+V)/\partial a_{mn}=0$ より未定係数 a_{mn} を決定する．外力仕事は荷重項を含む積分形となるので，集中荷重，部分分布荷重，満載荷重に応じて積分範囲を変え[3]，さらに足し合わせることで統一的に考慮できる．例えば，一様部分分布荷重 q_0 を板の (u,v) 座標を中心として幅 $2c$, $2d$ の長方形領域に受ける場合，式 (7-b) は $V=-q_0\int_{v-d}^{v+d}\int_{u-c}^{u+c}w(x,y)dxdy$ で表わされ，(u,v) に集中荷重 P を受ける場合には，$V=-Pw(u,v)$ で表わされる．この様に荷重項も簡単な手続きで統一的に考慮可能である．この a_{mn} を用いて，(5),(6) 式よりたわみ形が求まり，

$$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\qquad M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad\cdots\cdots\cdots (8)$$

よりモーメント M_x, M_y が求められ，さらに縁応力は $\sigma_f=\pm 6M/t^2$ から得られる．

3. 数値解析例

図−1 には簡単な数値例として，縦横比 2.0 の矩形板が部分的な等分布荷重を受ける場合を示すが，これに対応する解析解は見当たらない[4]．自由辺 A–A および中間の C–C 断面でのたわみ分布あるいは縁応力分布 σ_f を求め，a_{mn} の採用項数と解の精度の関係，i), ii) の関数形による解の比較などを図示している．



図−1 板曲げ問題の数値解析例：縦横比 2.0 の三辺単純支持一辺自由端矩形板

参考文献

1) 中沢・倉西・横幕：種々の境界および荷重条件を統一的に…，構造工学論文集, Vol.39A, pp.105–114, 1993.3.
2) 成岡・丹羽・山田・白石：構造力学 第III巻（板の力学），pp.105–108, 丸善, 1970.
3) Timoshenko,S.P. and Woinowsky-Krieger,S.: *Theory of Plates and Shells*, McGRAW-HILL, 1959.
4) Pucher,A.: *Einflußfelder elastischer Platten*, Springer–Verlag, 1958.