

I-322

エネルギー原理に基づくトラス構造物の変位解析法について

愛媛大学大学院 学 田中 賢太 愛媛大学工学部 正 大久保禎二
宇部興産(株) 正 和多田康男 西松建設(株) 正 大森 久義

1. まえがき

著者らは、これまでに最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づくトラス構造物の軸力の解析法¹⁾を提案しているが、本研究ではこの方法により可動節点変位も同時に正確に求められることを明らかにするとともに、Crotti-Engesserの定理に基づく差分による変位解析法との比較を行い、本研究の方法の妥当性を検証した結果について述べるものである。

2. エネルギー原理によるトラス構造物の材料非線形解析問題の定式化

最小コンプリメンタリーエネルギーの原理によれば、トラス構造物の各部材の軸力 N を決定する問題は、各可動節点における力の釣合条件式 g_j のもとで、構造物の全コンプリメンタリーエネルギー $\Pi_c(N)$ を最小化する次のような非線形のエネルギー最小化問題として定式化することができる。

$$\begin{aligned} \text{find } N, \text{ which minimize } \Pi_c(N) &= \sum_{i=1}^n \Pi_{c_i}(N_i) & (1) \\ \text{subject to } g_j = P_j - C_j N &= 0 & (j=1, \dots, m) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 $\Pi_{c_i}(N_i)$ は部材 i のコンプリメンタリーエネルギー、 P_j は可動節点変位成分 j に作用する外力、 C_j は各部材軸力の可動節点変位成分 j への変換行マトリックス、 n は部材数、 m は自由度の数である。

3. 非線形解析問題のラグランジュ関数の導入

いま、式(2)の制約条件 g_j を

$$\overline{g_j}(N) = C_j N = P_j \quad (j=1, \dots, m) \quad (3)$$

と書き改め、式(1)、(3)で表されるトラス構造物のコンプリメンタリーエネルギー最小化問題のラグランジュ関数 $L(N, \lambda)$ を導入すると、次式を得る。

$$L(N, \lambda) = \Pi_c(N) - \sum_{j=1}^m \lambda_j (P_j - \overline{g_j}(N)) \quad (4)$$

上式において、 λ_j はラグランジュ乗数である。

4. ラグランジュ関数の停留値におけるラグランジュ乗数 λ^* と可動節点変位 u との関係

式(4)で定義されたラグランジュ関数の停留値における $\Pi_c(N)$ および λ_j をそれぞれ $\Pi_c^*(N)$ および λ_j^* とすると、 λ_j^* は次式で表わされる。^{たとえば2)}

$$\lambda_j^* = \partial \Pi_c^*(N) / \partial P_j \quad (5)$$

ところで、Crotti-Engesserの定理により、次式が成り立つことが明らかにされている。³⁾

$$u_j = \partial \Pi_c^*(N) / \partial P_j \quad (6)$$

ここに、 u_j は可動節点変位成分 j における外力による実変位である。

式(5)と式(6)を比較することにより、 $\lambda_j^* = u_j$ となり、式(4)のラグランジュ関数 $L(N, \lambda)$ を N について最小化、 λ について最大化することにより求めた停留値 $L^*(N^*, \lambda^*)$ における $\lambda^* = [\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*]^T$ は、外力による実変位 $u = [u_1, \dots, u_m]^T$ と等しくなることがわかる。

5. 数値計算による検証および考察

式(5)および式(6)の可動節点変位 λ_j^* および u_j を以下の方法により求め、数値的に $\lambda_j^* = u_j$ となることを検証した。

(1) ラグランジュ関数の停留値におけるラグランジュ乗数 λ^* の計算方法

式(5)で表わされるラグランジュ関数の停留値における λ_j^* は、式(1)および式(2)を逐次二次計画法(SQP)により解く方法¹⁾に基づき、次のようにして計算した。すなわち、

まず、式(1)、(2)で定式化したトラス構造物のコンプリメンタリーエネルギー最小化問題の目的関数 Π_c を軸力 N について Taylor 展開し ΔN の二次形式で近似するとともに、式(2)の等号制約条件を ΔN の一次関数として近似することにより、 k th stageにおける軸力 N^k の改良のための変化量 ΔN^k を決定する近似二次計画問題を次のように導入する。

$$\text{find } \Delta N^k, \text{ which} \\ \text{minimize } Q_c^k = \nabla \Pi_c^T \Delta N^k + \frac{1}{2} \Delta N^k H_c^k \Delta N^k \quad (7)$$

$$\text{subject to } g_j^k = g_j(N^k) - C_j \Delta N^k = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (8)$$

ここに、 $\nabla \Pi_c^k$ 、 H_c^k はそれぞれ目的関数の1階偏微係数ベクトル、正定値係数行列である。

式(7)、(8)で定式化した近似二次計画問題のラグランジュ関数を導入すると、ラグランジュ乗数 λ_j^k は、次式で与えられる。

$$\lambda_j^k = -\nabla Q_c^k(\Delta N^k) C_j^T (C_j C_j^T)^{-1} \quad (9)$$

したがって、ラグランジュ関数の停留値における λ_j^* は、次式より求めることができる。

$$\lambda_j^* = -\nabla Q_c(\Delta N^*) C_j^T (C_j C_j^T)^{-1} \quad (10)$$

(2) Crotti-Engesserの定理による可動節点変位 u の計算方法

式(6)で表わされるCrotti-Engesserの定理による可動節点変位 u_j は、近似的に次式により計算した。

$$u_j = \frac{\partial \Pi_c^*}{\partial P_j} \approx \frac{\Pi_c^*(P_j + \Delta P_j) - \Pi_c^*(P_j)}{\Delta P_j} \quad (11)$$

ここに、 ΔP_j は求めようとする可動節点変位成分 j の方向に人為的に加えられた微小外力であり、これまでの研究成果に基づき、ここでは、 $\Delta P_j = 0.001 P_j$ を用いることとした。⁴⁾

(3) 計算結果の比較および考察

上記の二種類の方法により、図-1に示すパイリニアな応力度-ひずみ関係を有する材料よりなる図-2の(A)、(B)に示す10および16部材トラスの節点3における鉛直および水平変位解析を行った結果および相対誤差を表-1に示す。この表より明らかなように、ラグランジュ乗数 λ^* と可動節点変位 u との相対誤差は 0.04%~0.23% と非常に小さな値となっており、式(4)の停留条件を満足するラグランジュ乗数 $\lambda^* = [\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*]^T$ は、実外力による可動節点変位 $u = [u_1, \dots, u_m]^T$ と同一の値となることが確認された。また、応力度-ひずみ関係が複数個の直線で表わされる材料や曲線で表わされる材料の場合においても全く同様の結果を得ており、本研究で述べた式(7)~式(10)の方法により、いかなる非線形材料に対しても、軸力および可動節点変位が同時に正確に求められることが明らかとなった。

【参考文献】

- 1) 大久保 他, 土・学・論, 第374号 2) 三根 久, オペレーションズ・リサーチ
4) Ohkubo, S. and Makino, K., Computers & Structures Vol. 44, No. 1/2.

- 3) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., Mechanics of Materials.

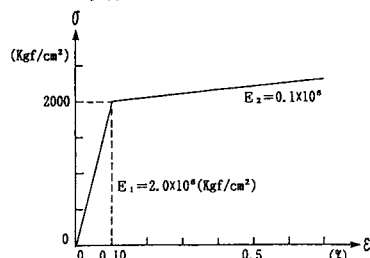
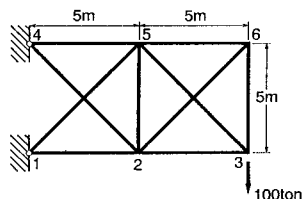
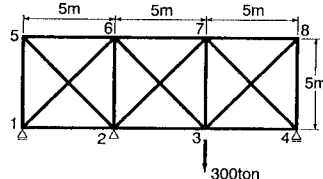


図-1 応力度-ひずみ関係



(A) 10部材トラス



(B) 16部材トラス

図-2 変位解析モデル

表-1 ラグランジュ乗数 λ^* と可動節点変位 u との比較

着目方向		全部材の 断面積 (cm ²)	λ^*	u (cm)	相対誤差* (%)
(A) 10部材トラス	鉛直 (↑+)	30.0	-56.26	-56.20	0.11
		50.0	-18.28	-18.25	0.16
		100.0	-2.013	-2.012	0.05
	水平 (→+)	30.0	-15.92	-15.91	0.06
		50.0	-5.765	-5.761	0.07
		100.0	-0.5116	-0.5114	0.04
(B) 16部材トラス	鉛直 (↑+)	30.0	-25.95	-25.92	0.12
		100.0	-0.9627	-0.9622	0.05
		200.0	-0.4813	-0.4811	0.04
	水平 (→+)	30.0	0.4378	0.4387	0.21
		100.0	0.1280	0.1283	0.23
		200.0	0.06402	0.06417	0.23

$$* \left| \frac{\lambda - u}{u} \right| \times 100$$