

I-321 Corotational Formulationを用いた平面Timoshenko梁の精度に関する考察

東京電機大学 学生員 古田 満

東京電機大学 正 員 井浦雅司

1. はじめに

幾何学的非線形問題には様々な手法が提案されており、用いられている解析手法を大別すると、Lagrange手法とEuler手法とがある。Lagrange手法に属するCorotational Formulationは、剛体変位除去の手法とも呼ばれ、剛体変位と相対変位とを区別して扱うものであり、これまで有効な手法として広く用いられている。その精度については、Bernoulli-Euler梁について井浦[1]の報告があり、相対変位を記述する理論に微小変位理論を用いても、その解は有限歪有限変位理論の解に収束するとされており、後藤ら[2]の結果と異なっている。

本報告では、平面Timoshenko梁を取り上げて、相対変位を記述する理論に微小変位理論を適用した時に、その解が有限歪有限変位理論の解に収束するかどうかを理論的に示すことを目的としている。また、数値計算例を通して、本報告の理論的結果の妥当性を明らかにしている。

2. 基礎式

Timoshenko梁の歪エネルギーは以下のように表される。

$$\Pi_s = \int_0^L \left[\frac{EA}{2}(\epsilon)^2 + \frac{EI}{2}(\kappa)^2 + \frac{GAs}{2}(\gamma)^2 \right] dx \quad (1)$$

ここに、 ϵ は軸歪、 κ は曲率、 γ はせん断歪、 EA は伸び剛性、 EI は曲げ剛性、 GAs はせん断剛性、 L は変形前の軸線の長さである。ここで、空間固定座標系の変位成分を $dx=U, dy=V, \lambda=\Phi, \lambda_0=\Phi_0$ とおき、一方、移動座標系の変位成分を $dx=u, dy=v, \lambda=\phi, \lambda_0=0$ とおく。この時、厳密な歪と変位の関係式は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \epsilon &= (d'_x + \cos \lambda_0) \cos \lambda + (d'_y + \sin \lambda_0) \sin \lambda - 1 \\ \kappa &= \lambda' \\ \gamma &= (d'_y + \sin \lambda_0) \cos \lambda - (d'_x + \cos \lambda_0) \sin \lambda \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 $(\quad)' = d(\quad)/dx$ である。

また、梁要素の両節点 i, j における量を $(\quad)_i, (\quad)_j$ とおくと、移動座標系の定義より零でない変位成分は ϕ_i, u_j, ϕ_j となる(Fig.1)。この変位成分と空間固定座標系における変位成分の関係は以下のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \phi_i \\ u_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_i - \theta \\ (U_j - U_i + L \cos \Phi_0) \cos \theta + (V_j - V_i + L \sin \Phi_0) \sin \theta - L \\ \Phi_j - \theta \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ここに、

$$\cos \theta = \frac{U_j - U_i + L \cos \Phi_0}{L + u_j}, \quad \sin \theta = \frac{V_j - V_i + L \sin \Phi_0}{L + u_j}$$

$$L + u_j = [(U_j - U_i + L \cos \Phi_0)^2 + (V_j - V_i + L \sin \Phi_0)^2]^{1/2}$$

であり、さらに、 $\theta = \Phi - \phi$ である。

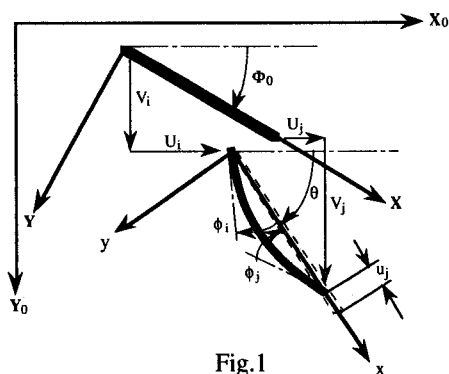


Fig.1

3. Corotational Formulationの精度

本報告では、相対変位に線形理論を用いることとし、Corotational Formulationの精度を調べる方法は文献[1]と同じである。すなわち、局所座標系において、線形理論より得られる歪成分と、空間固定座標系において厳密な理論より得られる歪成分とを比較することにより、Corotational Formulationによる数値解の精度を調べる。なお、以下においては $\Phi_0=0$ とされているが、これは精度を調べる上で何ら一般性を失うことではない。

Timoshenko梁の場合、通常は変位関数として一次関数を用いられ、それらは、以下のように表される。

$$u = u_i(1 - \frac{x}{L}) + u_j \frac{x}{L}, \quad v = v_i(1 - \frac{x}{L}) + v_j \frac{x}{L}, \quad \phi = \phi_i(1 - \frac{x}{L}) + \phi_j \frac{x}{L} \quad (4)$$

線形理論における歪-変位関係式は、式(2)における高次項を無視して、それに式(4)の変位関数を代入すれば、以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= u' = \frac{1}{L}(u_j - u_i), \quad \kappa_1 = \phi' = \frac{1}{L}(\phi_j - \phi_i) \\ \gamma_1 &= v' - \phi = \frac{1}{L}(v_j - v_i) - \phi_i(1 - \frac{x}{L}) - \phi_j \frac{x}{L} \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、 $(\cdot)_1$ は線形理論を用いた時の歪であることを示している。

先ず、軸歪の精度を調べる。式(5)の ε_1 に式(3)を代入して整理すると、

$$(1+\varepsilon_1)^2 = \left(\frac{U_j - U_i}{L} + 1 \right)^2 + \left(\frac{V_j - V_i}{L} \right)^2 \quad (6)$$

となる。一方、空間固定座標系における厳密な軸歪は、式(2)に与えられており、これを変形すると以下の式を得る。

$$(1+\varepsilon)^2 + \gamma^2 = (U' + 1)^2 + (V')^2 \quad (7)$$

さて、上式において、 U' と V' を近似するのに前進差分を用いれば

$$U' = \frac{U_j - U_i}{L}, \quad V' = \frac{V_j - V_i}{L} \quad (8)$$

となり、この時、式(6),(7)より

$$(1+\varepsilon_1)^2 = (1+\varepsilon)^2 + \gamma^2 \quad (9)$$

という関係を得る。すなわち、 $\gamma \neq 0$ の時は、 ε_1 は ε に近づくことができないことを示している。一方、 $\gamma=0$ の時は、 $\varepsilon_1=\varepsilon$ となり、 ε_1 に含まれる誤差は前進差分に含まれている誤差と同じであることが分かる。

次に、 κ_1 について調べると、 $\kappa_1=(\Phi_j - \Phi_i)/L$ となり、これは κ を前進差分を用いて近似したものと同じであり、 κ_1 に含まれる誤差は、 γ の大小に無関係に、前進差分の誤差と同じであることが分かる。

さらに、せん断歪の精度を調べる。せん断歪を厳密に積分すると、解の精度が低下することは良く知られており、これを修正するために、低減積分が広く用いられている。これは式(5)に $x=L/2$ を代入することと等価であり、この時、せん断歪は以下のように求まる。

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2}(\phi_i + \phi_j) \quad (10)$$

一方、空間固定座標系における厳密なせん断歪は式(2)に与えられており、 $\Phi = \theta + \phi$ を考慮して、式(3)を代入し、整理すると

$$\sin(-\phi) = \frac{\gamma}{\sqrt{(1+\varepsilon)^2 + \gamma^2}} \quad (11)$$

となる。ここで、 $\phi \approx (\phi_i + \phi_j)/2$ と近似すれば、式(10)より、

$$\sin \gamma_1 = \frac{\gamma}{\sqrt{(1+\varepsilon)^2 + \gamma^2}} \quad (12)$$

となり、これは、 ε, γ が1に比べて小さく無視できる時に限り、 $\gamma_1 \approx \gamma$ なる関係が得られ、一般には γ_1 は γ に近づくことはできないことを示している。

以上の理論的考察より、せん断歪が無視できる時は、Corotational Formulationによる解は有限歪有限変位理論の解に収束するが、せん断歪が大きく無視できない時

は両者の解に大きな差異が生じることが予想される。

4. 数値計算例

文献[3]にある、両端ピン支持の梁の中央に集中荷重を受ける例題を取り上げ、その結果をFig.2に示す。用いた梁の細長比は5であり、実線は厳密な歪-変位関係式を用いた結果であり、点線は局所座標系において線形の歪-変位関係式を用いた結果である。これより、せん断変形が無視できる場合には、両者の解が一致し、せん断変形が無視出来ない場合には、両者の差はかなり大きくなることが分かる。このことは、本研究の理論的考察より得られた結果と全く同じである。

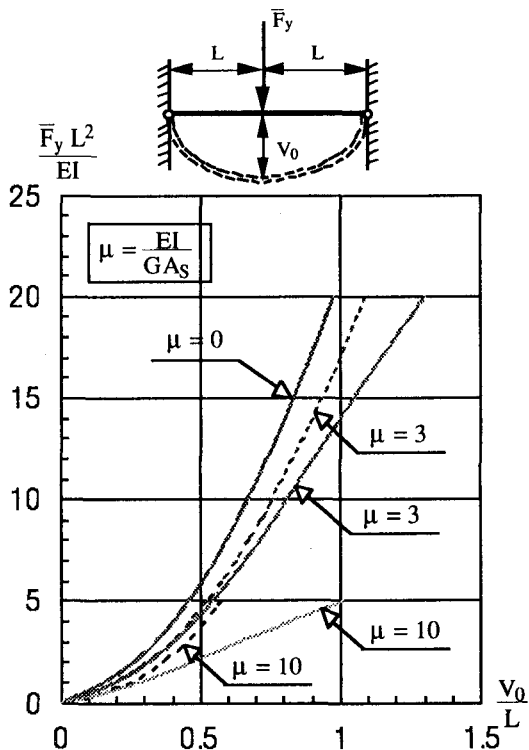


Fig.2 (細長比 $\lambda = 5$)

5. 参考文献

- [1]井浦: Corotational Formulationの精度に関する考察(平面Bernoulli-Euler梁の場合), 構造工学論文集, 土木学会, Vol.40A, pp.407-414, 1994.
- [2]後藤, 春日井, 西野: 局所移動座標系の選択が平面骨組の有限変位解析の精度に及ぼす影響, 土木学会論文集, 第386号/I-8, pp.311-320, 1987.
- [3]Goto, Y., Yoshimitsu, T. and Obata, M.: Elliptic integral solutions of plane elastica with axial and shear deformations, Int. J. Solids and Structures, 26(4), pp.375-390, 1990.