

I - 320

ラプラス変換を用いた斜張橋の粘弾性挙動解析

日本構研情報

正員 狩野 正人

京都大学工学部 正員 渡邊 英一

関西大学総合情報学部 正員 古田 均

京都大学工学部 正員 杉浦 邦征

京都大学工学部 正員 宇都宮智昭

1. まえがき

現在, 美観などの理由から, 斜張橋が数多く建設されている. 斜張橋ケーブルは, ソケットからの抜け出しを主な原因として, クリープ・リラクセーション挙動を示すことが知られている. そのような斜張橋の粘弾性挙動を追跡するためには複雑な非線形解析を行う必要があるが, ここではラプラス変換と, 初期ひずみおよび初期応力を考慮した構成則とを用いることにより, 架設段階を含むより一般的な解析が比較的容易に行えることを示す.

2. ラプラス変換を用いた粘弾性挙動解析

ラプラス変換を用いて粘弾性挙動を解析する方法は以下のとおりである¹⁾.

1) 線形粘弾性体の構成則は, パラメータ s で記述されるラプラス像空間においては弾性体のそれと同じ形であることから, ラプラス像空間において複数のパラメータ s_j に対して線形解析を行うことにより, 着目量(変位・断面力・ひずみなど)の経時挙動 $w(t)$ のラプラス変換 $\bar{w}(s)$ が $\bar{w}(s_j)$ として離散的に得られる.

2) 離散データ $\bar{w}(s_j)$ に対して, これを厳密な意味でラプラス逆変換することは, 実際問題として不可能であるので, $w(t)$ を適当な指数関数 $v(t)$ で仮定し, これをラプラス変換した $\bar{v}(s)$ を最小二乗法によって離散データ $\bar{w}(s_j)$ にフィッティングさせることにより $v(t)$ を決定する.

構造系に n 個の粘弾性要因(異なった粘弾性定数)が存在する場合, $w(t)$ は次式のように表される.

$$w(t) = a_0 + a_1 e^{-b_1 t} + a_2 e^{-b_2 t} + \dots + a_n e^{-b_n t} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i e^{-b_i t} \quad (1)$$

しかし, 係数 $a_i (i=0, 1, \dots, n)$, $b_i (i=1, 2, \dots, n)$ の全てを決定することは困難であるため, ここでは次のような簡便な方法をとる. すなわち, 粘弾性挙動 $v(t)$ を各要因の遅延時間 T_i を用いて次のように表し, ラプラス像空間における最小二乗法によって $a_i (i=0, 1, \dots, n)$ を決定する.

$$v(t) = a_0 + a_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + a_2 e^{-\frac{t}{T_2}} + \dots + a_n e^{-\frac{t}{T_n}} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i e^{-\frac{t}{T_i}} \quad (2)$$

3. 初期ひずみおよび初期応力を考慮した線形粘弾性3要素モデルの構成則

Fig. 1に示すような粘弾性3要素モデルに作用する応力の変化は, 架設段階を考慮すると, 例えばFig. 2のようになる. いま, 状態B(時刻 $\tau = \tau_0$) に着目して, このとき作用している応力, およびひずみをそれぞれ $\sigma(\tau_0) = \sigma_0$, $\epsilon(\tau_0) = \epsilon_0$ とする. ここで, 状態Bを初期状態として,

$$\tau = \tau_0 + t \quad (3)$$

$$\epsilon(t) = \epsilon(\tau_0) + \epsilon(t) = \epsilon_0 + \epsilon(t) \quad (4)$$

で表わされる時間変数の変換を行うと, 状態C(時刻 t) においては次の関係が成り立つ.

$$\sigma(t) = \sigma_0 + E_1 \epsilon_1(t) \quad (5)$$

$$\sigma(t) = E_2 (\epsilon_0 - \sigma_0 / E_1) + E_2 \epsilon_2(t) + \eta \dot{\epsilon}_2(t) \quad (6)$$

$$\epsilon(t) = \epsilon_1(t) + \epsilon_2(t) \quad (7)$$

式(5)~(7)より, $\epsilon_1(t)$, $\epsilon_2(t)$ を消去し, さらに,

$$(E_1 + E_2) / \eta = \lambda, \quad E_2 / \eta = \mu \quad (8) \sim (9)$$

と整理すると,

$$\dot{\sigma}(t) + \lambda \sigma(t) - \mu E_1 \epsilon_0 = E_1 \dot{\epsilon}(t) + \mu E_1 \epsilon(t) \quad (10)$$

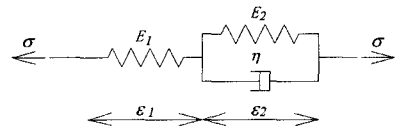


Fig. 1 線形粘弾性3要素モデル

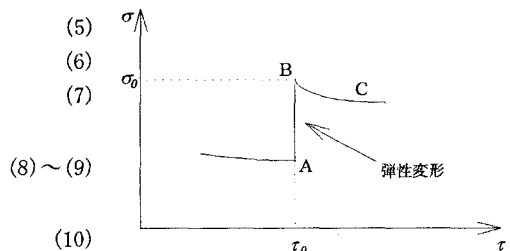


Fig. 2 応力状態

となり、時間空間における構成式が得られる。式(10)をラプラス変換し、 $\sigma(0)=\sigma_0$ 、 $\varepsilon(0)=0$ を代入すると、次式が得られる。

$$\bar{\sigma}(s) = E_1 \frac{s+\mu}{s+\lambda} \bar{\varepsilon}(s) + \frac{1}{s+\lambda} \sigma_0 + \frac{\mu}{s(s+\lambda)} E_1 \varepsilon_0 \quad (11)$$

さて、構成則が式(11)のように表わされる場合、剛性方程式は、

$$[\bar{K}]\{\bar{u}\} = \frac{1}{s}\{P\} - \frac{1}{s+\lambda}\{F_\sigma\} - \frac{\mu}{s(s+\lambda)}\{F_\varepsilon\} \quad (12)$$

のように書ける。ここに、 $\{F_\sigma\}$ は σ_0 から計算される等価節点力ベクトル、 $\{F_\varepsilon\}$ は $E_1 \varepsilon_0$ から計算される等価節点力ベクトルである。

4. 計算例

Fig. 3に示す解析モデルに、Fig. 4(a)のような载荷を行った場合の変位(Fig. 4(b))を求める。まず、時刻 $t=t_0$ までの解は、

$$u(t) = u_\infty + (u_0 - u_\infty)e^{-\mu t} \quad (13)$$

ここに、

$$u_0 = \frac{P_0}{K_1}, \quad u_\infty = \frac{P_0}{K_1} \frac{\mu}{\lambda} \quad (14) \sim (15)$$

時刻 $t=t_0$ における弾性変形は、 $u_E = P_E/K_1$ であるから、弾性変形終了後の全変位を $u(t'_0)$ で表わすと次のようになる。

$$u(t'_0) = u_\infty + (u_0 - u_\infty)e^{-\mu t_0} + \frac{P_E}{K_1} \quad (16)$$

等価節点力ベクトル $F_\sigma = P_0 + P_E$ 、 $F_\varepsilon = K_1 u(t'_0)$ より、ラプラス像空間における剛性方程式は、次のようになる。

$$K_1 \frac{s+\mu}{s+\lambda} \bar{v}(s) = \frac{\lambda}{s(s+\lambda)} (P_0 + P_E) - \frac{\mu}{s(s+\lambda)} K_1 u(t'_0) \quad (17)$$

これを $\bar{v}(s)$ について解いて、ラプラス逆変換すると、

$$v(\tau) = \left\{ \frac{P_E}{K_1} + (u_\infty - u_0)e^{-\mu t_0} \right\} (1 - e^{-\mu \tau}) \quad (18)$$

5. 実橋解析例

Fig. 5に示す実橋モデル²⁾に対して、別の実物大ケーブルの引張試験によって得られた粘弾性定数を用いて、粘弾性挙動解析を行った。Fig. 6に側径間最下段ケーブルの張力の経時変化を示す。

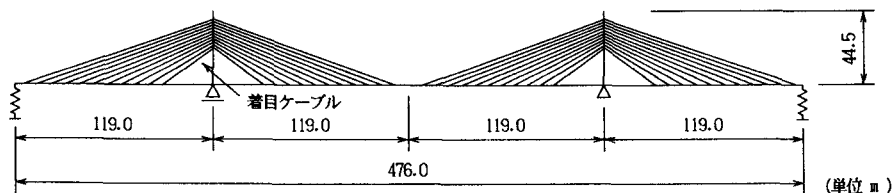


Fig. 5 実橋解析モデル

6. あとがき

本報告では、初期ひずみおよび初期応力を有する線形粘弾性3要素モデルの構成則を導くことにより、架設段階を考慮した斜張橋の粘弾性挙動が、比較的厳密かつ容易に解析できることを示した。詳細については、当日紹介する。

参考文献 1) 渡邊英一・亀井正博・若林保美・楠葉誠司：架設段階を考慮した斜張橋のケーブルのリラクセーション予測，構造工学論文集，Vol. 36A，pp. 1103-1114，1990年3月。

2) 大阪市建設局：菅原城北大橋工事誌，平成2年3月。

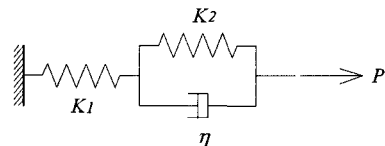
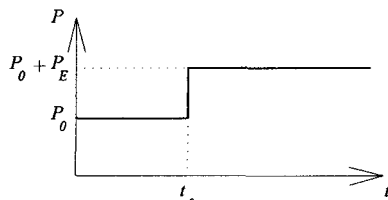
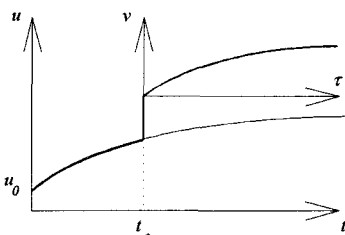


Fig. 3 解析モデル



(a) 载荷条件



(b) 変位

Fig. 4 载荷条件と変位

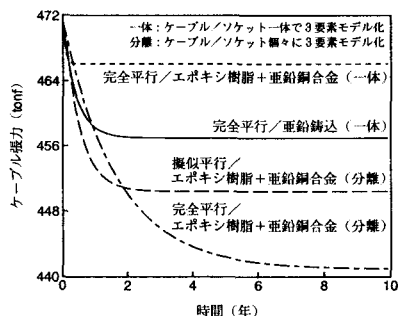


Fig. 6 ケーブル張力の経時変化