

I-319 マトリックス応力法による骨組構造の解析法について

東京理科大学 正員 川井 忠彦

明星大学 正員 竹内 則雄

佐藤工業 正員 矢田 敬

1. はじめに

構造解析の解法には変位法と応力法がある。応力法は変位法と比較すると、解を得るためのマトリックス演算の手順が著しく複雑であり汎用化が難しいために、今日の構造解析コードではあまり用いられていない。変位法は演算の過程が簡単でありプログラム化し易いために構造解析コードでは広く使用されているが、変位の連続性を前提としているために、板曲げの問題などではcompatible modelを求めるのが困難なことは周知の事実である。これに対して、応力法では変位の連続性を考える必要が無く、応力分布を1次に仮定すれば応力の連続性が保障されるために下界値を算定することができるといふ長所がある。ここでは、応力法の欠点である複雑な演算手順を見直しシステムチックな演算が可能であることを考察するために、せん断力と曲げモーメントが作用する単純な梁の場合について応力法による演算手順について検討する。

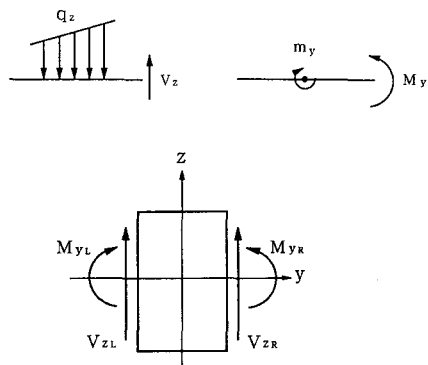


図-1 断面力

2. 応力法の定式化

(1) 基礎方程式

せん断力と曲げモーメントの基礎方程式は次のようになる。

$$\frac{dV_z}{dx} - q_z = 0, \quad \frac{dM_y}{dx} + m_y + V_z = 0 \quad (1)$$

図-1のように断面力を仮定すると、断面力は次のようになる。

$$V_z(x) = V_{zL} - \int q_z dx, \quad M_y(x) = M_{yL} + xV_{zL} - \int m_y dx + \int dx \int q_z dx \quad (2)$$

要素応力方程式は次のようになる。

$$V_{zL}^i + V_{zR}^i = \int_0^L q_z dx, \quad M_{yL}^i - M_{yR}^i + V_{zL}^i L = \int_0^L m_y dx + \int_0^L dx \int_0^L q_z dx \quad (3)$$

ただし、上付きの*i*は要素番号を表す。また、節点平衡条件式は次のようになる。

$$V_{zR}^i + V_{zL}^{i+1} = 0, \quad M_{yR}^i - M_{yL}^{i+1} = 0 \quad (4)$$

(4)式を(3)式に代入すると次のようになる。

$$\mathbf{AS} = \mathbf{G}_0 \bar{\mathbf{F}} + \mathbf{R} \quad (5)$$

ここで、**S** : 断面力, $\bar{\mathbf{F}}$: 不静定力, **R** : 作用力である。したがって、

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}^{-1} [\mathbf{G}_0 \bar{\mathbf{F}} + \mathbf{R}] \quad (6)$$

となる。(6)式で不静定力 $\bar{\mathbf{F}}$ が求められれば断面力**S**が得られる。

(2) 不静定力 $\bar{\mathbf{F}}$ の算定

Castiglianoの定理を用いると $\int_0^L M \frac{dM}{dV_{zR}} dx = 0$ より、

$$\mathbf{C}^T \bar{\mathbf{F}} = -\mathbf{D}^T \mathbf{R} \quad (7)$$

ここで、

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^n L^i \mathbf{A}_{(n+i,n)}^{-1} \mathbf{A}_{<n+i>}^{-1} \mathbf{G}_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n L^i \left(\mathbf{A}_{(n+i,n)}^{-1} \mathbf{A}_{<i>}^{-1} \mathbf{G}_0 + \mathbf{A}_{(i,n)}^{-1} \mathbf{A}_{<n+i>}^{-1} \mathbf{G}_0 \right) + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n L^i \mathbf{A}_{(i,n)}^{-1} \mathbf{A}_{<i>}^{-1} \mathbf{G}_0$$

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^n L^i \mathbf{A}_{(n+i,n)}^{-1} \mathbf{A}_{<n+i>}^{-1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n L^i \left(\mathbf{A}_{(n+i,n)}^{-1} \mathbf{A}_{<i>}^{-1} + \mathbf{A}_{(i,n)}^{-1} \mathbf{A}_{<n+i>}^{-1} \right) + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n L^i \mathbf{A}_{(i,n)}^{-1} \mathbf{A}_{<i>}^{-1}$$

ただし、 $\mathbf{A}_{(i,j)}^{-1}$ は $\mathbf{A}^{-1}$ の (i,j) 要素、 $\mathbf{A}_{(i)}^{-1}$ は $\mathbf{A}^{-1}$ の i 行ベクトルを表す。

同様に $\int_0^L M \frac{dM}{dM_{yR}} dx = 0$ より、

$$\mathbf{E}^T \bar{\mathbf{F}} = -\mathbf{H}^T \mathbf{R} \quad (8)$$

ここで、

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n L^i \mathbf{A}_{(n+i,2n)}^{-1} \mathbf{A}_{<n+i>}^{-1} \mathbf{G}_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n L^i \left(\mathbf{A}_{(n+i,2n)}^{-1} \mathbf{A}_{<i>}^{-1} \mathbf{G}_0 + \mathbf{A}_{(i,2n)}^{-1} \mathbf{A}_{<n+i>}^{-1} \mathbf{G}_0 \right) + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n L^i \mathbf{A}_{(i,2n)}^{-1} \mathbf{A}_{<i>}^{-1} \mathbf{G}_0$$

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^n L^i \mathbf{A}_{(n+i,2n)}^{-1} \mathbf{A}_{<n+i>}^{-1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n L^i \left(\mathbf{A}_{(n+i,2n)}^{-1} \mathbf{A}_{<i>}^{-1} + \mathbf{A}_{(i,2n)}^{-1} \mathbf{A}_{<n+i>}^{-1} \right) + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n L^i \mathbf{A}_{(i,2n)}^{-1} \mathbf{A}_{<i>}^{-1}$$

(7)、(8)式より不静定力 $\mathbf{F}$ が求められる。

3. 計算例

計算例を図-2に示す。この図から正解値が得られることが分かる。ここで解の収束性を調べるために曲げモーメントを一定とした場合の分割数による誤差を図-3に示す。この図より、分割数を細かくすれば正解に収束することが分かる。

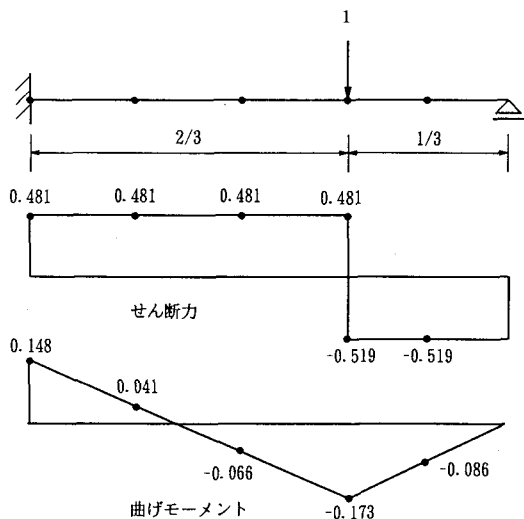


図-2 断面力の計算結果

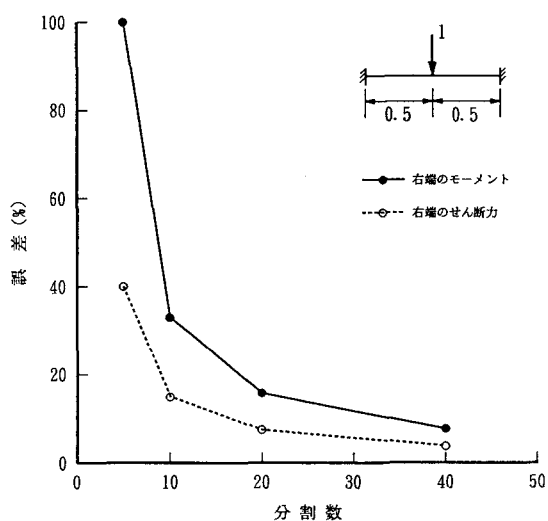


図-3 断面力の収束状況

4. まとめ

簡単な問題ではあるが応力法によりシステムチックに梁の演算が可能であることを示した。今後、平面問題について検討する所存である。