I-316 Block-diagonal 分解手法による線形振動解析

和歌山高専　環境都市工学科　正会員○　有尾　一郎
東北大学　土木工学科　正会員　池田　清宏
長岡技術科学大学　建設系　正会員　鳥居　邦夫

1. はじめに

最近の制振技術の発達にともなって構造物の振動を可変的にコントロールさせて，早急に振動を収束できるようになってきた．しかし，現行の振動解析技術においては複雑な構造形態やその構造物の大きさに比べてミクロな減衰，行列の固有性の問題等から，減衰項を未知量あるいは微小量として取扱われている場合が多く，本来の固有値解析技術の向上には寄与されているとは言い難い．

本研究は対称構造系に分布する減衰項も慣性項や復元項と同様に既知量として取扱い，運動方程式と既約表現間の幾何学的な関係を詳細に調べることにより，デカルト座標系で構成されるいくつかの連成項を相殺し，各既約表現内での複素固有値を直接求めようとするものである．これにより，一般の対称構造系の動的問題に Block-diagonal 分解を適用し，線形制御解析の効率を大幅に向上させることが可能となる．

2. ポテンシャルエネルギの群共変性

自由度 n を持つ離散系の全ポテンシャルエネルギを考える．慣性系の各質点 $m_i(i=1,\cdots,n)$ の相対変位を $\boldsymbol{u}_i$, 相対速度を $\dot{\boldsymbol{u}}_i$ とし，時刻 t におけるポテンシャルエネルギを Lagrange 形式

$$L(\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}},t)\equiv\sum_{i=1}^{n}L_i(\boldsymbol{u}_i,\dot{\boldsymbol{u}}_i,t)$$

で表すこととする．ただし，$\boldsymbol{u}$ は時間の関数 $\boldsymbol{u}(t)$ を，$\dot{\boldsymbol{u}}=\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)/\mathrm{d}t$ を表す．時間軸上の区間 $[t_0,t_1]$ に定義された運動を作用積分すると，

$$\Pi=\int_{t_0}^{t_1}L(\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}},t)\,\mathrm{d}t \qquad (1)$$

全ポテンシャルとなるから，任意の $\boldsymbol{u}_\alpha(t)$ について変分すると，

$$\delta\Pi=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{u}_\alpha}\delta\boldsymbol{u}_\alpha+\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{u}}_\alpha}\delta\dot{\boldsymbol{u}}_\alpha\right]\mathrm{d}t$$

となる．運動の始点 t_0 と終点 t_1 を固定する $(\delta\boldsymbol{u}_\alpha(t_0)=\delta\boldsymbol{u}_\alpha(t_1)=0)$．式 (1) を部分積分することにより，

$$\delta\Pi=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{u}_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{u}}_\alpha}\right)\right]\delta\boldsymbol{u}_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$$

となる．したがって，変分原理からこのときの系の運動は，

$$\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{u}_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{u}}_\alpha}=\mathbf{0},\quad \alpha=1,\cdots,n \qquad (2)$$

Lagrange 運動方程式になる．ここで，時刻 t における変数の変換 $T(g)$ を導入すると，式 (2) は

$$T(g)L(\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}},t)=L(T(g)\boldsymbol{u},T(g)\dot{\boldsymbol{u}},t),g\in G(3)$$

で与えられる．$\boldsymbol{u}_\alpha$ と $T(g)\boldsymbol{u}_\alpha\,(\alpha=1,\cdots,n)$ の変域が同じとき，変換 (3) の全体は群 G をつくる．

3. 複素固有値解析

時刻 t における線形の振動方程式を

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{u},t)&\equiv\left(\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{u}_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{u}}_\alpha}\right)^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{f}=\mathbf{0}\end{aligned} \qquad (4)$$

と定義する．ここに，$\boldsymbol{M}$ は質量の，$\boldsymbol{C}$ は減衰の，$\boldsymbol{K}$ は剛性の行列を，$\boldsymbol{f}$ は外力のベクトルをそれぞれ表す．式 (4) は n 次元の変位ベクトルを $\boldsymbol{u}(t)$ としている．この $\boldsymbol{u}(t)$ の導関数を $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{u}}$ と定義すると，$\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{\boldsymbol{u}}$ となり，これらを $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}$ の形で表すと，式 (4) は

$$\dot{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{P} \qquad (5)$$

となる．ここで，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{K}^*&\boldsymbol{C}^*\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{2n\times2n}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{Bmatrix}0\\\boldsymbol{f}^*\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{P}\in\boldsymbol{R}^{2n}$$

と変形できる．ここに，変数 $\boldsymbol{K}^*=-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{C}^*=-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{f}^*=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{f}$ および $\boldsymbol{I}$ は単位行列

である．$2n$ 元連立 1 階の微分方程式 (5) を解くために，自由減衰振動$\boldsymbol{P}=\mathbf{0}$とし，一般解が調和関数$\boldsymbol{z}(t)=\bar{\boldsymbol{z}}\exp(\lambda t)$ に従うものと仮定し，

$$\boldsymbol{B}(\lambda)\equiv\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I} \tag{6}$$

と定義すると，$2n$ 個の固有値は一般に

$$\det|\boldsymbol{B}(\lambda)|=\det\begin{vmatrix}-\lambda\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{K}^{*} & \boldsymbol{C}^{*}-\lambda\boldsymbol{I}\end{vmatrix}=0 \tag{7}$$

の特性方程式から得られる．

4. Block-diagonal 分解

Block-diagonal 分解を実際に行う部分の変換について具体的に記述しておくと，

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{B}}(\lambda)&=\Psi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\Psi-\lambda\boldsymbol{I}\\ &=\begin{bmatrix}-\lambda\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{*}\boldsymbol{H} & \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{*}\boldsymbol{H}-\lambda\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{8}$$

であり，変換後は

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}(\lambda)=\left[\begin{array}{c|c}-\lambda\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\\ \hline \mathrm{diag}\,\widetilde{\boldsymbol{K}}^{*\mu} & \mathrm{diag}\,\widetilde{\boldsymbol{C}}^{*\mu}-\lambda\boldsymbol{I}\end{array}\right]$$

となる．ここで，各既約表現毎に空間が分解された．ある 1 つの既約表現μの空間は

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}^{\mu}(\lambda)=\left[\begin{array}{c|c}-\lambda^{\mu}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\\ \hline \widetilde{\boldsymbol{K}}^{*\mu} & \widetilde{\boldsymbol{C}}^{*\mu}-\lambda^{\mu}\boldsymbol{I}\end{array}\right] \tag{9}$$

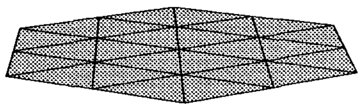
から構成されている．ここで，固有値λを既約表現毎の固有値としてλ^{μ}と表し，式 (9) は既約空間毎に独立に扱える．したがって，既約表現空間毎の係数行列式

$$\det|\widetilde{\boldsymbol{B}}^{\mu}(\lambda)|=0\quad ,^{\forall}\mu\in R(D_n) \tag{10}$$

のようにとれば，各群毎の n_{μ}個の固有値$\lambda_i^{\mu}(i=1,\cdots,n_{\mu})$ が得られる．

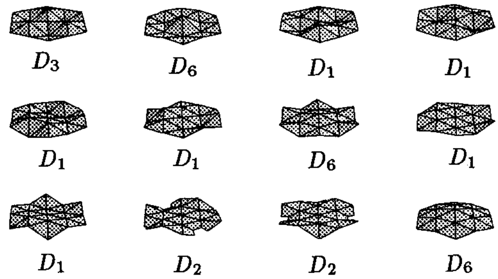
5. 解析結果

図–1に示される正 6 角形板構造の固有値解析結果を示す．対称群で表されるこのモデルの対称変形モードの一部は図–2のとおりある．直接固有値を求めるための行列式 (7) は図–3(a) に示されるような関数形をもつ．これに対し，既約表現毎に変換された式 (10) は図–3(c)-(f) となる．図–3(b) はこれらを合成したもので全ての解が一致していることが確認できる．

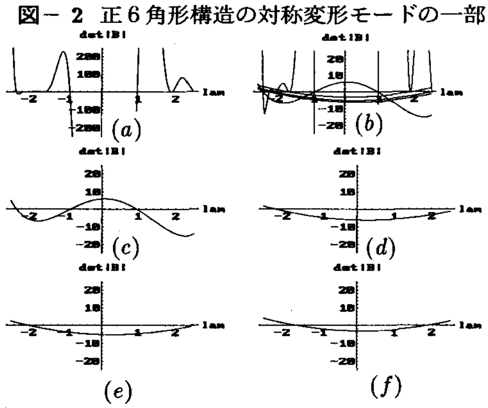


材料諸量 $\bar{m}=1kg,\bar{c}=0.1Ns/m,\bar{k}=1N/m$

図－ 1 D_6–不変板構造モデル (1D.O.F/1NODE)



図－ 2 正 6 角形構造の対称変形モードの一部



図－ 3 正 6 角形構造の係数行列式

参考文献

1) Ikeda, K. and Murota, K. : Bifurcation analysis of symmetric structures using block-diagonalization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 86(2), pp.215-243, 1991.

2) Ikeda, K., Ario, I. and Torii, K. : Block-diagonalization analysis of symmetric plates, *International Journal of Solids and Structures*, 29(22), pp.2779-2793, 1992.

3) Murota, K. and Ikeda, K. : On randam imperfections for structures of regular-polygonal symmetry, SIAM,*Journal on Applied Mathematics*, 52(6), pp.1780-1803, 1992.