

I-314

三次元有限要素解析における連立一次方程式解法に関する検討

東京工業大学工学部 正 員 吉田 裕
 東京工業大学大学院 学生員 ○清水 純
 東 京 ガ ス 内田洋平

1. はじめに コンピュータの性能が向上し、実用面においても3次元問題の解析が広く行なわれるようになってきている。3次元解析では扱うべき係数マトリックスの次元が非常に大きくなるために膨大な計算時間を要するので、解析の実用化のためには連立一次方程式の解法の効率化が鍵となる。本研究は、直接法としてスカイライン法およびウェーブフロント法、反復解法としてCG法およびICCG法をとりあげ、3次元問題の解析を対象とした連立一次方程式解法の特徴を比較検討したものである。

2. 対象とした問題と有限要素方程式の特徴

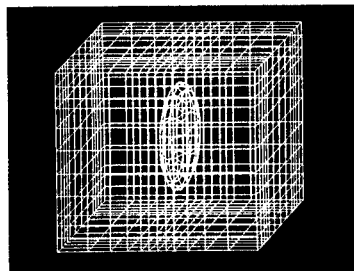
解析の対象とした問題は楕円空洞を有する直方体であり、図-1に示すような要素分割数をとったものである。3次元問題の場合には、方程式を構成する非零要素に対応する節点番号が非常に離れてしまう(図-2)ため、直接法では多くの零成分がフィルインとなる。

3. 使用したコンピュータシステムについて

用いたコンピュータは、スーパーコンピュータETA10-Eと、EWS(S-4/IX)であり、計算機のメモリ構成は階層メモリ構成となっている(表-1)。

表-1 計算機システムのメモリ構成

用いた計算機	CPUメモリ	メモード・メモリ	ディスク(スワップ)
ETA10-E(1cpu)	128 MB	256 MB	1.5 GB
S-4/IX	16 MB	—	64 MB



<対象の寸法>
 X方向全長 100(cm)
 Y方向全長 120(cm)
 Z方向全長 100(cm)
 空洞X方向直径 50(cm)
 空洞Y方向直径 20(cm)
 空洞Z方向直径 60(cm)

<材料定数>
 ヤング率 $2.1 \times 10^5 (\text{kgf/cm}^2)$
 ポアソン比 0.3

<要素>
 8節点アイソパラメトリック要素

<拘束条件> Y=0(cm)の節点のX, Y, Z方向の変位を拘束
 Y=120(cm)の節点のX, Y方向の変位を拘束 Z方向に0.1(cm)の強制変位

	節点数	要素数	各方向の要素分割数			スカイライン法の場合に必要な記憶容量
			X	Y	Z	
対象1	1494	1088	12	12	8	10.5MB
対象2	5290	4320	18	18	14	94.5MB
対象3	8918	7488	20	20	20	242.0MB
対象4	12782	11008	24	24	20	430.9MB

図-1 解析対象及び直接解法で要する容量

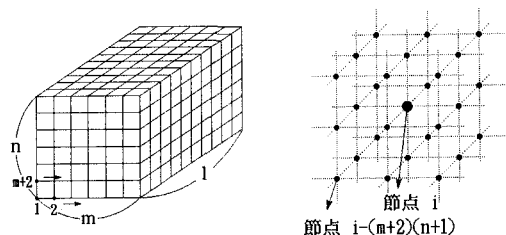
4. 直接解法で必要となる記憶容量 スカイライン法では、それぞれの節点番号とその節点の関係している節点のうち最も若い節点番号との差がコラムの高さになるため、一辺の要素分割数が高々24の解析対象でもディスクメモリを使わなければならない。

図-2 係数マトリックスの非零要素に対応する節点番号の差なる。ウェーブフロント法においても、消去する方程式の長さがスカイラインのコラムの高さと同程度となり、スカイライン法と同様に多くの記憶容量を必要とする。

CG法の場合には、係数マトリックスとベクトルの乗算のみで解を求めることができるために、非零成分の記憶のみですむ。ICCG法の場合にも、非零成分の他に不完全コレスキー分解によって書き換えられる対角ブロックのみの記憶で解を求めることができる。

5. 数値計算による検討 解析に要した計算時間(ディスクとの入出力時間を含む)を比較して図-3に示す。

5-1. 反復解法について 図-4は、載荷条件が異なる場合にCG法及びICCG法による収束状況を示したものである。すべて総自由度数に対して非常に少ない回数で収束しており、収束性の良い問題ではあるが、CG法の場合には載荷条件の違いで収束回数が相当異なることがわかる。ICCG法では収束回数は短縮され



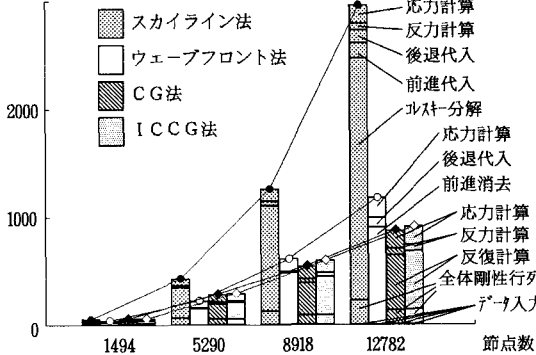
ETA-10による計算時間
(sec)


図-3 要した計算時間の比較

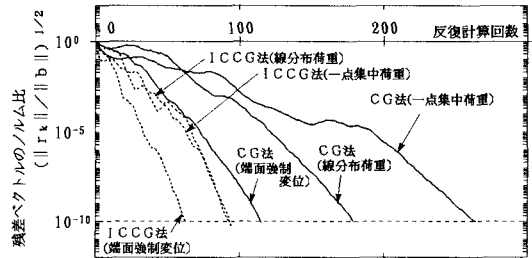
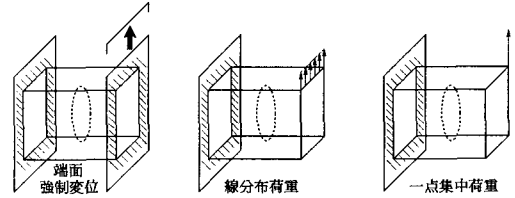


図-4 載荷条件の違いによる反復解法の収束状況

ているが、図-3から明らかなように、反復計算1回ごとに1回の前進後退代入計算を必要とするために、必ずしも計算時間の短縮につながってはいない。

5-2. 直接解法の場合に要する計算時間について 問題が大規模になるにつれて、反復法に比べて直接法の方が計算時間の増加の割合が大きい(図-3)。特に最も大きな解析対象の場合に計算時間が増加しているが、これは記憶領域としてディスクが使用されているためである。ウェーブフロント法に比べてスカイライン法の方が増加の割合が大きい、これはスカイライン法では、コレスキー分解の際に分解する列の各成分の行番号に対応する列も参照しなければならないのに対し、ウェーブフロント法では、フロント行列内の消去計算とデータ転送を別に扱っているために生ずるデータ転送の効率の違いによるものである。

5-3. ベクトル計算とスカラー計算 図-5は、ETA-10による通常のベクトル計算の場合とあえてスカラー計算を実行した場合およびS-4/IXで計算を実行した場合に要した計算時間を比較して示したものである。ウェーブフロント法およびスカイライン法ではベクトル計算により計算時間が大幅に短縮されている。ETA-10のスカラー計算とS-4/IXで要した計算時間における直接法の相対的な傾向が異なっている。

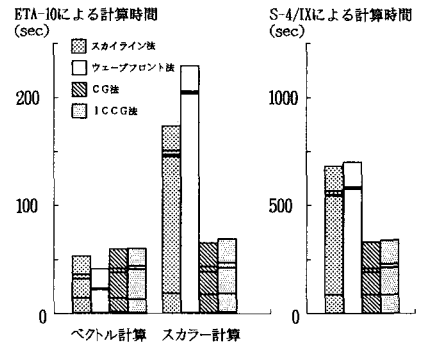


図-5 ベクトル計算とスカラー計算の比較(対象1)

6. おわりに 以上に、3次元問題を対象として連立一次方程式解法の比較検討を行った。記憶容量の面と計算時間の面を総合的に判断して、3次元の大規模な問題を対象とする場合には、現状では反復解法によらざるをえないと結論される。

参考文献 1) 吉田 裕, 中川昌弥, 田中知足: 共役勾配法を基礎とする連立一次方程式解法の効率化に関する考察, 土木学会論文報告集, 第437号, pp.173-182, 1991年10月
2) B. Irons, S. Ahmad: Techniques of Finite Elements, Wiley, 1980.