I-313　　ランチョス法による大規模複素固有値解析

○摂南大学　学　河野　純　　　摂南大学　正　頭井　洋
神戸製鋼　　　広岡　栄子　　　神戸製鋼　　　米沢　智志

1　まえがき

非対称行列の固有値解析は、減衰振動問題の振動特性を知る上で重要であり、これまで多くの解法が提案されている。有限要素法解析に現れる大次元行列の固有値解析法として、ランチョス法の有効性に着目した研究も行われており、対称行列に対する加速機能を組み込んだ藤掛の研究[1]や非対称行列に対する研究も文献 [2] 他いくつか見られる。本文では、実固有値問題に対する藤掛の研究を参考に大規模非対称行列に対する複素固有値解析にランチョス法を適用し、所要の固有値と固有ベクトルを求める際のランチョスベクトルの生成数や原点移動との関係について検討した結果を報告する。

2　ランチョス法

M, C, K 型の2次の固有値問題をつぎのような1次の固有値問題に変換する。

$$\mathbf{AY} = \theta\mathbf{Y} \tag{1}$$

ここに

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M} \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}$$

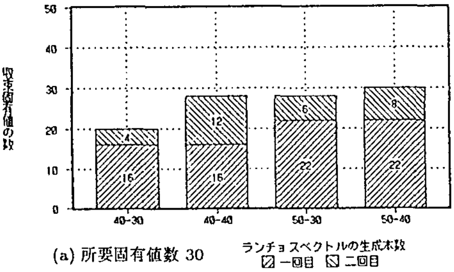
$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix}, \ \theta = \frac{1}{\lambda}$$

である。振動問題では、低次の固有値が必要になるので、剛性行列の逆行列を用いて一次の固有値問題に変換している。行列 A は実行列であるが非対称になるので、固有値θ、固有ベクトル Y とも複素数になり、左固有ベクトル Z の導入が必要になる。計算手順はつぎのようである。

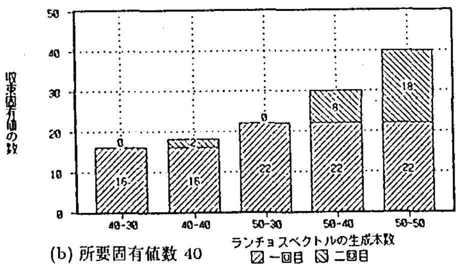
まず1回目のランでは、ランチョス法を用いて非対称三重対角行列 T を作成する。T の次数はランチョスベクトルの生成数に低次元化されている。その行列 T の固有値をダブル QR 法によって解き、対応する固有ベクトルはガウス消去法によって求める。その際、完全ピボット選択を用いている。これと同様にして、マトリクス $\mathbf{T}^T$ の固有ベクトルも解き、これらの固有ベクトルを元の右および左固有ベクトル Y,Z に変換する。求めた固有値と固有ベクトルを用いて、残差ノルムを計算し、所要の精度を有しているか検定を行う。この検定を満足する固有値と固有ベクトルのペアの数が、求めたい数に満たないとき、残りの固有値および固有ベクトルが求まるまでランを繰り返す。2回目以降のランで、原点シフトを行う場合は、シフト値を未収束の固有値の平均値になるよう選ぶ。

3　計算例

まず、制振用アルミニウムサンドイッチ部材を自由度数93のはり要素でモデル化した場合の計算例について示す。減衰用樹脂の効果で大きな減衰性能を有する。このモデルでは、自由度数が100以下なので、Hessenberg-QR 法でも解くことができ、本手法で求めた固有値と一致することを確認した。図 1(a) に求めたい固有値の数を30とした場合のランチョスベクトルの生成数と収束固有値数との関係を示す。1回目のランのランチョスベクトル生成数を40と50、2回目のランのベクトル生成数を30と40に設定している。図 1(b) には、求めたい固有値の数を40とした場合のランチョスベクトルの生成数と収束固有値数との関係を示す。1回目のランのランチョスベクトル生成数を40と50、2回目のランのベクトル生成数を30、40、50に設定している。いずれも2回目のランでは、原点シフトを行っている。図1よ



(a) 所要固有値数 30



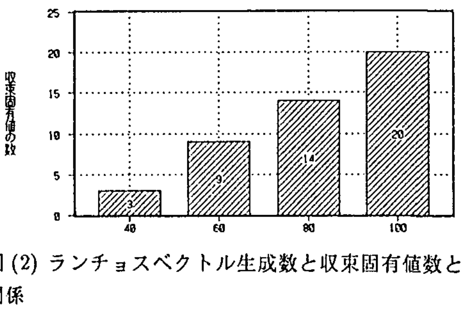
(b) 所要固有値数 40

図 (1) ランチョスベクトル生成数と収束固有値数との関係

り、2回目のランで、原点シフトを行ったときでもランチョスベクトルの生成数をかなり多くしないと、所要の固有値を求めることができないことがわかる。図1(a)と(b)で2回目のランの収束固有値の数が違っている理由は、シフト値が異なるためで、未収束固有値の数が多いほどシフト値が大きくなり、収束固有値の数が減少する傾向にある。なお、未収束と判定された固有値のうちの多くの値は、ランチョスベクトルの生成数を増加させて得た収束固有値と等しい値が得られおり、残差ノルムが所要の精度を満足しない要因は固有ベクトルの誤差に基づくものといえる。したがって、固有ベクトルをより精度よく求めることができれば、同じランチョスベクトルの生成数に対し収束固有値の数をかなり多くすることができる。

2回目以降のランで原点シフトを行うには、シフトした剛性行列の逆行列を再計算する必要があり、自由度数が増えるほど幾何級数的に計算時間が増大する。以上のことから、大規模複素固有値問題では、1回目のランのランチョスベクトルの生成本数を多くして、できるだけ1回のランで所要の固有値および固有ベクトルを求める方が望ましいと考えられる。

次に大規模な複素固有値問題の例として、建設省の土木研究所と民間会社28社との官民共同研究「道路橋の免震システムの開発研究」の一環として実施された$1km$級の超多径間免震橋[3]のモデルを用いて、ランチョスベクトルの生成数と収束固有ベクトルとの関係を調べた。総自由度560の有限要素法モデルで、免震支承部分は大きな減衰性能を有する。ランの回数は1回とし、ランチョスベクトルの生成本数を40, 60, 80, 100の4種の計算を行い、収束固有値数との関係を図2に示した。ランチョスベクトルの生成数を多くするに従い、ほぼ線形的に収束固有値の数は増加している。しかし、図1と比較すると、同じランチョスベクトルの生成数の場合、収束固有値の数はかなり少ない。



図(2) ランチョスベクトル生成数と収束固有値数との関係

このことから、自由度が大きくなるにつれ、1回のランで所要の収束固有値と固有ベクトルを得るには、ランチョスベクトルの生成本数を自由度数に応じて増加させる必要のあることがわかる。この場合も、未収束固有値のかなり値はランチョスベクトルの生成本数を増加させて得た収束固有値と等しい値が得られ、残差ノルムの誤差要因は固有ベクトルの誤差によるものが支配的であった。

比較のためサブスペース法による実固有値解析を行い、固有値を比較したがほぼ同様の結果が得られた。残差ノルムの検定も満足していることから、自由度が500程度の固有値問題にも本手法により精度よく複素固有値解析を行えることが確認できた。

4 あとがき

得られた主な結果をまとめると以下のようである。

(1) ランチョスベクトルの生成本数は固有値の必要数と解析対象の総自由度数の両者によって決定する必要がある。

(2) 大規模複素固有値問題では、1回目のランチョスベクトルの生成本数を多くして、できるだけ1回のランで所要の固有値および固有ベクトルを求める方が望ましい。

(3) 固有ベクトルをより精度よく求めることができれば、同じランチョスベクトルの生成数に対し収束固有値の数をかなり多くすることができる。

今回は、非対称三重対角行列の固有値をダブルQR法によって解き、固有ベクトルの計算は完全ピボット選択によるガウス消去法によった。今後、固有値解析にDKA法[5]、固有ベクトルの計算に逆反復法を適用した場合についても検討する予定である。

参考文献

[1] 藤掛政久:ランチョス法による大規模固有値問題の高速解法、機械学会論文集(C編)、55巻、511号、1989

[2] B.Nour-Omid 他:Lanczos Method for Dynamic Analysis of Damped Structural Systems,Earthquake Eng. and Structural Dyn.,Vol.18,1989

[3] 濱崎他:1km級の桁長を有する曲線橋の免震設計ににおける動的解析、機械学会、機械力学・計測制御後援会、講演論文集、1992

[4] 戸川隼人:マトリクスの数値計算、オーム社

[5] 戸川隼人:非対称固有値問題の新しい解法、日本鋼構造学会、構造力学における数値解析法シンポジウム論文集、第10巻、1986